ĐỀ THAM KHẢO THI HKI – TOÁN 9 (LỚP CHUYÊN – NÂNG CAO)

Năm học: 2021 – 2022 **Thời gian làm bài: 150 phút (không kể thời gian phát đề)**

Đề thi có: 02 trang **Hình thức: tự luận**

Người soạn đề: *Nguyễn Khánh Ninh* (hệ thức cơ bản + toán thực tế)

Câu 1. (2,25 điểm)

1/ Rút gọn: A = $\dfrac{\sqrt{13+\sqrt{147}}-\sqrt{7-\sqrt{27}}}{\sqrt{5+\sqrt{3}}-\sqrt{23-\sqrt{507}}}+\sqrt{\dfrac{23\sqrt{3}-16}{2\sqrt{3}+1}}$

2/ Giải phương trình: $\sqrt{100x^2-180x+225}-\sqrt{36x^2-108x+81}=2x+12$

3/ Cho B = $\dfrac{2\sqrt{x}-3}{x-2\sqrt{x}+1}-\dfrac{\sqrt{x}-4}{x-\sqrt{x}}+\dfrac{1}{x\sqrt{x}-2x+\sqrt{x}}$

C = $\dfrac{5x\sqrt{x}+320}{x\sqrt{x}-4x+16\sqrt{x}}-\dfrac{5x+12\sqrt{x}+7}{x-1}-\dfrac{9\sqrt{x}-17}{x-\sqrt{x}}$

Với x > 0 và x # 1. Chứng minh: B + C là một hằng số

Câu 2. (1,5 điểm) Trong mặt phẳng tọa độ Oxy cho đường thẳng

(d_1): y = (2m – 3).x + m + 2 với m là tham số

a/ Tìm điểm cố định mà đường thẳng (d_1) luôn đi qua với mọi m

b/ Trong trường hợp m = 2

+ Vẽ (d_1) trên hệ trục tọa độ

+ Lập phương trình đường thẳng (d_2) biết (d_2) cắt (d_1) tại điểm có tung độ là 2 và cắt trục hoành và trục tung lần lượt tại E và F sao cho diện tích tam giác OEF là 9

Câu 3. (1,5 điểm) Tại 1 nơi ở trên mặt đất xét ở cùng thời điểm vào buổi tối thì nhiệt độ hiện tại ở mặt đất chính là 22 độ C. Biết rằng cứ lên cao 1km thì nhiệt độ lại giảm đi là 6 độ C. Gọi y là độ cao xét tại nơi đó (km), x là nhiệt độ tương ứng với độ cao tại nơi đó (độ C)

a/ Viết công thức biểu thị y theo x dạng hàm số bậc nhất: y = ax + b

b/ Biết rằng độ F cũng là đơn vị dùng để đo nhiệt độ do nhà vật lý Daniel Gabriel Fahrenheit đặt tên. Biết công thức đổi từ độ F sang độ C là: m = 1,8n + 32. Trong đó, m là độ F, n là độ C. Hỏi tại nơi đó độ chênh lệch nhiệt độ tính theo độ F giữa 2 độ cao 12500m với 8000m là bao nhiêu ?.

c/ Hỏi rằng tại nơi đó có độ cao tối thiểu là bao nhiêu để có nhiệt độ cao nhất là –76 độ F

Câu 4. (1 điểm) Đây là bảng giá gốc 1 số sản phẩm của siêu thị big C (chưa tính thuế VAT)

Tên sản phẩm	Thành tiền	Thuế VAT
Sữa chua VinaMilk	15000 đồng / lốc	8%
Sữa bò Long Thành không đường	40000 đồng / hộp	15%
Mì ăn liền Gấu Đỏ	5000 đồng / gói	5%
Bánh su kem	22000 đồng / hộp	10%

Chị Năm là thành viên tích cực của khu mua sắm siêu thị big C. Chị có thẻ thành viên được giảm giá 10% cho tất cả mặt hàng mà chị đã mua. Vào ngày cuối tuần, siêu thị giảm giá

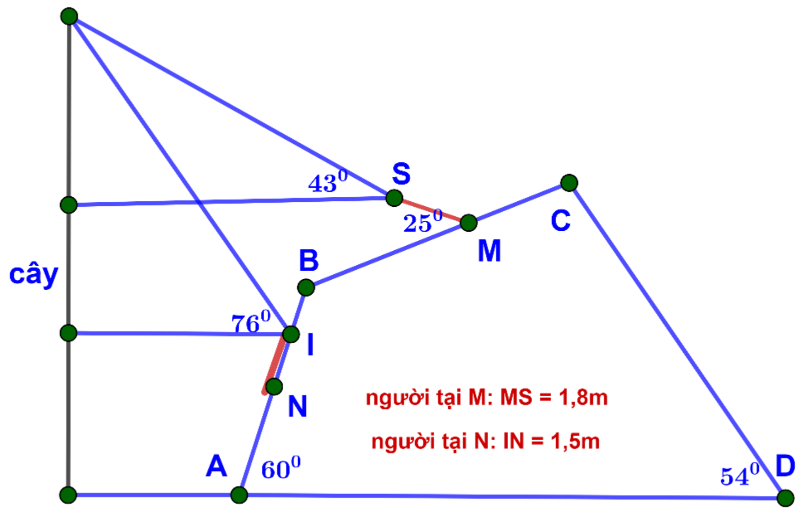
20% cho tất cả các sản phẩm của cửa hàng. Vào ngày cuối tuần, chị ghé vào siêu thị mua 5 lốc sữa chua vinamik, 2 hộp sữa bò Long Thành không đường và 4 gói mì ăn liền Gấu Đỏ.

a/ Hỏi chị Năm phải trả bao nhiêu tiền cho các sản phẩm trên.

b/ Biết chị Năm có 200000 đồng để chi trả cho tất cả sản phẩm của cửa hàng. Sau khi mua các sản phẩm trên chị muốn mua thêm vài hộp bánh su kem. Hỏi với số tiền trên chị mua được nhiều nhất là bao nhiêu hộp bánh su kem.

Câu 5. (0,75 điểm) Một bể nước hình hộp chữ nhật có chiều cao là 1,5m. Diện tích xung quanh và diện tích toàn phần của bể lần lượt là $9m^2$ và $13m^2$. Vào lúc 5 giờ sáng, người ta bắt đầu mở 2 vòi nước loại I và II chảy vào bể, biết lúc này bể không chứa nước. Trong 1 phút vòi loại (I) chảy nhiều hơn vòi loại (II) 1 lượng là $\frac{10}{3}$ lít. Ban đầu mở cho vòi loại (I) chảy trước vào bể cho đến khi lượng nước chứa 40% bể thì tắt vòi loại (I) tiếp tục cho vòi loại (II) chảy cho đầy bể thì đến 11 giờ 30 phút sáng thi bể đầy nước. Hỏi nếu như mở cả 2 vòi chảy cùng một lúc thì mấy giờ bể sẽ đầy nước ?

Câu 6. (0,5 điểm) Hình vẽ mô tả một con dốc ABCD trong đó có AB = 5,8m; AD = 16m ; CD = 8,6m; $\hat{A} = 60^0$; $\hat{D} = 54^0$. Kế bên dốc gần vị trí điểm A (xem hình vẽ) có một cái cây rất cao và vuông góc với mặt đất. Tại vị trí trung điểm N của cạnh AB, có 1 người có chiều cao từ chân đến mắt là 1,5m (vị trí chân ở điểm N) đang nằm tựa vào dốc và nhìn đỉnh cây với góc nhìn hợp với mặt đất 1 góc là 76^0. Tại vị trí M trên dốc BC sao cho MB = 2MC có 1 người có chiều cao từ chân đến mắt là 1,8m (vị trí chân ở điểm M) đang nằm trườn trên dốc BC hợp với BC có 1 góc là 25^0 và người đó nhìn đỉnh cây với 1 góc hợp với mặt đất 1 góc là 43^0. Tìm chiều cao của cây, biết cây cao hơn dốc và vị trí người tại M đang nằm (các tính toán và kết quả làm tròn làm lấy 2 chữ số thập phân)



Câu 7. (2,5 điểm) Điểm C thuộc đường tròn (O;R) đường kính AB sao cho AC < BC. Tiếp tuyến tại A của (O) cắt BC tại D. Kẻ CH _|_ AB tại H, K là trung điểm của cạnh AC, OK cắt AD tại E. Điểm J thuộc cạnh OC sao cho 2CJ = 3AH, HE cắt AC tại R. Kí hiệu S là diện tích

a/ Chứng minh: A, E, C, O thuộc 1 đường tròn và $2(BD^2 – OD^2) = 3(EK.BC + BH.BO)$

b/ BE cắt DR tại V và cắt CH tại I, AI cắt (O) tại M. Chứng minh: MD tiếp xúc với (O)

c/ Kẻ BG _|_ HM tại G. Đường thẳng qua G vuông góc với BK cắt EC tại N

Chứng minh: $\widehat{MNG} = \widehat{CGV}$. Tính tỉ số $\frac{S_{\Delta DNG}}{S_{\Delta BCG}}$ khi $\frac{2tan^2 AJK}{tanMNG + tanCGV} - \frac{\sqrt{3}.S_{\Delta AHC}}{S_{\Delta ABD}}$ đạt giá trị lớn nhất

Đáp án đề thi tham khảo

Câu 1.

1/ Đặt M = $\dfrac{\sqrt{13+\sqrt{147}}-\sqrt{7-\sqrt{27}}}{\sqrt{5+\sqrt{3}}-\sqrt{23-\sqrt{507}}}=\dfrac{\sqrt{13+7\sqrt{3}}-\sqrt{7-3\sqrt{3}}}{\sqrt{5+\sqrt{3}}-\sqrt{23-13\sqrt{3}}}$

Ta luôn có: $\sqrt{13+7\sqrt{3}}-\sqrt{7-3\sqrt{3}}>0$ (a)

Thật vậy (a) ⇔ $13+7\sqrt{3}>7-3\sqrt{3}$ ⇔ $6>-10\sqrt{3}$ (luôn đúng) vì $6>0$ và $-10\sqrt{3}<0$

Ta luôn có: $\sqrt{5+\sqrt{3}}-\sqrt{23-13\sqrt{3}}>0$ (b)

Thật vậy (b) ⇔ $5+\sqrt{3}>23-13\sqrt{3}$ ⇔ $18<16\sqrt{3}$ ⇔ $\sqrt{324}<\sqrt{768}$ (luôn đúng)

Từ (a), (b) => M > 0

Ta có: $M^2=\dfrac{\left(\sqrt{13+7\sqrt{3}}-\sqrt{7-3\sqrt{3}}\right)^2}{\left(\sqrt{5+\sqrt{3}}-\sqrt{23-13\sqrt{3}}\right)^2}$

$$=\frac{13+7\sqrt{3}-2\sqrt{(13+7\sqrt{3})(7-3\sqrt{3})}+7-3\sqrt{3}}{5+\sqrt{3}-2\sqrt{(5+\sqrt{3})(23-13\sqrt{3})}+23-13\sqrt{3}}$$

$$=\frac{20+4\sqrt{3}-2\sqrt{91-39\sqrt{3}+49\sqrt{3}-63}}{28-12\sqrt{3}-2\sqrt{115-65\sqrt{3}+23\sqrt{3}-39}}=\frac{20+4\sqrt{3}-2\sqrt{28+10\sqrt{3}}}{28-12\sqrt{3}-2\sqrt{76-42\sqrt{3}}}$$

$$=\frac{20+4\sqrt{3}-2\sqrt{(5+\sqrt{3})^2}}{28-12\sqrt{3}-2\sqrt{(7-3\sqrt{3})^2}}=\frac{20+4\sqrt{3}-2\left|5+\sqrt{3}\right|}{28-12\sqrt{3}-2\left|7-3\sqrt{3}\right|}$$

$$=\frac{20+4\sqrt{3}-2(5+\sqrt{3})}{28-12\sqrt{3}-2(7-3\sqrt{3})}=\frac{20+4\sqrt{3}-10-2\sqrt{3}}{28-12\sqrt{3}-14+6\sqrt{3}}=\frac{10+2\sqrt{3}}{14-6\sqrt{3}}=\frac{2(5+\sqrt{3})}{2(7-3\sqrt{3})}$$

$$=\frac{5+\sqrt{3}}{7-3\sqrt{3}}=\frac{(5+\sqrt{3})(7+3\sqrt{3})}{(7-3\sqrt{3})(7+3\sqrt{3})}=\frac{35+15\sqrt{3}+7\sqrt{3}+9}{7^2-\left(3\sqrt{3}\right)^2}$$

$$=\frac{44+22\sqrt{3}}{22}=\frac{11(4+2\sqrt{3})}{22}=\frac{4+2\sqrt{3}}{2}$$

Vì M > 0 => M = $\sqrt{\dfrac{4+2\sqrt{3}}{2}}=\dfrac{\sqrt{(\sqrt{3}+1)^2}}{\sqrt{2}}=\dfrac{\left|\sqrt{3}+1\right|}{\sqrt{2}}=\dfrac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{2}}$

Ta có: $\sqrt{\dfrac{23\sqrt{3}-16}{2\sqrt{3}+1}}=\sqrt{\dfrac{(23\sqrt{3}-16)(2\sqrt{3}-1)}{(2\sqrt{3}+1).(2\sqrt{3}-1)}}=\sqrt{\dfrac{138-23\sqrt{3}-32\sqrt{3}+16}{\left(2\sqrt{3}\right)^2-1^2}}$

$$= \sqrt{\frac{154 - 55\sqrt{3}}{(2\sqrt{3})^2 - 1^2}} = \sqrt{\frac{11.(14 - 5\sqrt{3})}{11}} = \sqrt{\frac{2.(14 - 5\sqrt{3})}{2}} = \sqrt{\frac{28 - 10\sqrt{3}}{2}}$$

$$= \sqrt{\frac{(5-\sqrt{3})^2}{2}} = \frac{|5 - \sqrt{3}|}{\sqrt{2}} = \frac{5 - \sqrt{3}}{\sqrt{2}}$$

Vậy A = $\frac{\sqrt{3} + 1}{\sqrt{2}} + \frac{5 - \sqrt{3}}{\sqrt{2}} = \frac{6}{\sqrt{2}} = \frac{6\sqrt{2}}{2}$ = $3\sqrt{2}$

Vậy A = $3\sqrt{2}$

2/ $\sqrt{100x^2 - 180x + 225} - \sqrt{36x^2 - 108x + 81} = 2x + 12$

$\Leftrightarrow \sqrt{25.(4x^2 - 12x + 9)} - \sqrt{9.(4x^2 - 12x + 9)} = 2x + 12$

$\Leftrightarrow 5.\sqrt{(2x - 3)^2} - 3.\sqrt{(2x - 3)^2} = 2x + 12$

$\Leftrightarrow 2.\sqrt{(2x - 3)^2} = 2x + 12 \Leftrightarrow |2x - 3| = x + 6$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} 2x - 3 < 0 \\ 3 - 2x = x + 6 \end{cases} \\ \begin{cases} 2x - 3 \geq 0 \\ 2x - 3 = x + 6 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} 2x - 3 < 0 \\ 3x = -3 \end{cases} \\ \begin{cases} 2x - 3 \geq 0 \\ x = 9 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} 2x - 3 < 0 \\ x = -1\ (nhận) \end{cases} \\ \begin{cases} 2x - 3 \geq 0 \\ x = 9 (nhận) \end{cases} \end{array}\right.$$

Vậy phương trình đã cho có 2 nghiệm là: x = –1; x = 9

3/ Ta có: $x - \sqrt{x} = \sqrt{x}(\sqrt{x} - 1)$, $x - 2\sqrt{x} - 1 = (\sqrt{x} - 1)^2$

$x\sqrt{x} - 2x + \sqrt{x} = \sqrt{x}\left(x - 2\sqrt{x} + 1\right) = \sqrt{x}.(\sqrt{x} - 1)^2$

Vậy: B = $\frac{2\sqrt{x} - 3}{x - 2\sqrt{x} + 1} - \frac{\sqrt{x} - 4}{x - \sqrt{x}} + \frac{1}{x\sqrt{x} - 2x + \sqrt{x}}$

$= \frac{2\sqrt{x} - 3}{(\sqrt{x} - 1)^2} - \frac{\sqrt{x}-4}{\sqrt{x}(\sqrt{x}-1)} + \frac{1}{\sqrt{x}.(\sqrt{x}-1)^2}$

$= \frac{\sqrt{x}\left(2\sqrt{x} - 3\right) - \left(\sqrt{x} - 4\right)\left(\sqrt{x} - 1\right) + 1}{\sqrt{x}.(\sqrt{x} - 1)^2} = \frac{2x - 3\sqrt{x} - \left(x - 4\sqrt{x} - \sqrt{x} + 4\right) + 1}{\sqrt{x}.(\sqrt{x} - 1)^2}$

$= \frac{2x - 3\sqrt{x} - x + 4\sqrt{x} + \sqrt{x} - 4 + 1}{\sqrt{x}.(\sqrt{x} - 1)^2} = \frac{x + 2\sqrt{x} - 3}{\sqrt{x}.(\sqrt{x} - 1)^2}$

Mà: $x + 2\sqrt{x} - 3 = x + 3\sqrt{x} - \sqrt{x} - 3 = \sqrt{x}\left(\sqrt{x} + 3\right) - \left(\sqrt{x} + 3\right) = (\sqrt{x} - 1)(\sqrt{x} + 3)$

Do đó B = $\frac{(\sqrt{x} - 1)(\sqrt{x} + 3)}{\sqrt{x}.(\sqrt{x} - 1)^2} = \frac{\sqrt{x} + 3}{\sqrt{x}.(\sqrt{x} - 1)}$

Ta có: C = $\frac{5x\sqrt{x} + 320}{x\sqrt{x} - 4x + 16\sqrt{x}} - \frac{5x + 12\sqrt{x} + 7}{x - 1} - \frac{9\sqrt{x} - 17}{x - \sqrt{x}}$

$= \frac{5\left(\sqrt{x} + 4\right)\left(x - 4\sqrt{x} + 16\right)}{\sqrt{x}.\left(x - 4\sqrt{x} + 16\right)} - \frac{\left(\sqrt{x} + 1\right)(5\sqrt{x} + 7)}{\left(\sqrt{x} - 1\right)\left(\sqrt{x} + 1\right)} - \frac{9\sqrt{x} - 17}{\sqrt{x}(\sqrt{x} - 1)}$

$= \frac{5(\sqrt{x}+4)}{\sqrt{x}.} - \frac{5\sqrt{x}+7}{\sqrt{x}-1} - \frac{9\sqrt{x}-17}{\sqrt{x}(\sqrt{x}-1)}$

$= \frac{5(\sqrt{x}+4)(\sqrt{x}-1) - \sqrt{x}(5\sqrt{x}+7) - (9\sqrt{x}-17)}{\sqrt{x}(\sqrt{x}-1)}$

$= \frac{5(x-\sqrt{x}+4\sqrt{x}-4) - 5x - 7\sqrt{x} - 9\sqrt{x} + 17}{\sqrt{x}(\sqrt{x}-1)}$

$= \frac{5(x+3\sqrt{x}-4) - 5x - 7\sqrt{x} - 9\sqrt{x} + 17}{\sqrt{x}(\sqrt{x}-1)}$

$= \frac{5x + 15\sqrt{x} - 20 - 5x - 7\sqrt{x} - 9\sqrt{x} + 17}{\sqrt{x}(\sqrt{x}-1)} = \frac{-\sqrt{x}-3}{\sqrt{x}(\sqrt{x}-1)}$

Do đó B + C = $\frac{\sqrt{x}+3}{\sqrt{x}(\sqrt{x}-1)} + \frac{-\sqrt{x}-3}{\sqrt{x}(\sqrt{x}-1)}$ = 0 => B + C là hằng số

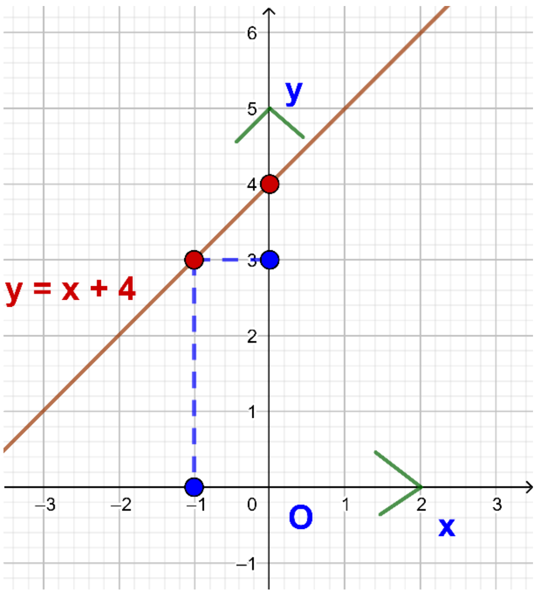
Câu 2.

a/ Viết lại phương trình đường thẳng (d_1): y = (2m – 3).x + m + 2 = 2mx – 3x + m + 2

= m.(2x + 1) – 3x + 2 ⇔ y + 3x – 2 = m.(2x + 1). (*)

Gọi A là điểm mà mọi đường thẳng (d_1) luôn đi qua. Khi đó để nghiệm phương trình (*) luôn đúng với mọi m ⇔ $\begin{cases} 2x+1=0 \\ y+3x-2=0 \end{cases}$ ⇔ $\begin{cases} 2x+1=0 \\ y=2-3x \end{cases}$ ⇔ x = $\frac{-1}{2}$; y = $\frac{7}{2}$

Vậy đường thẳng (d_1) luôn đi qua điểm cố định A $\left(\frac{-1}{2};\frac{7}{2}\right)$ với mọi m



b/ Khi m = 2 thì (d_1) trở thành: y = x + 4

Bảng giá trị của đường thẳng y = x + 4

X	0	–1
Y	4	3

Gọi phương trình đường thẳng (d_2) có dạng:

y = ax + b

Cho (d_1) cắt (d_2) tại C

* C thuộc (d_1) => $x_C = y_C - 4 = 2 - 4 = -2$

Vậy tọa độ điểm C là (–2;2)

* C thuộc (d_2) => 2 = –2a + b ⇔ b = 2a + 2

Vậy (d_2) có dạng: y = ax + 2a + 2

(d_2) cắt Ox tại E => y_E = 0 và a # 0

=> 0 = a.x_E + 2a + 2 => $x_E = \frac{-2a-2}{a}$ => OE = $|x_E|$ = $\left|\frac{-2a-2}{a}\right| = \left|\frac{2.(-a-1)}{a}\right|$

(d_2) cắt Oy tại F => x_F = 0 và a # 0

=> y_F = 2a + 2 => OF = $|y_F|$ = |2a + 2| = 2.|a + 1|

Ta có: $S_{\Delta OEF}$ = 9 ⇔ $\frac{OE.OF}{2}$ = 9 ⇔ |2(a + 1)|.$\left|\frac{2.(-a-1)}{a}\right|$ = 18

⇔ |a + 1|.$\left|\frac{-a-1}{a}\right|$ = $\frac{9}{2}$ (*). Điều kiện: a # 0

+ Nếu a < –1 thì a + 1 < 0 ; – a – 1 > 0 và a < –1 < 0 => $\frac{-a-1}{a}$ < 0

+ Nếu – 1 ≤ a < 0 thì a + 1 > 0 ; – a – 1 < 0 và a < –1 < 0 => $\frac{-a-1}{a}$ > 0

+ Nếu a > 0 thì a + 1 > 0 ; – a – 1 < 0 và a > 0 => $\frac{-a-1}{a}$ < 0

Tóm gọn lại khi a < –1 và a > 0 thì a + 1 và $\frac{-a-1}{a}$ trái dấu.

Khi đó phương trình (*) ⇔ $\frac{-(a+1).(-a-1)}{a} = \frac{9}{2}$ ⇔ $\frac{(a+1)^2}{a} = \frac{9}{2}$

⇔ 2.(a + 1)^2 = 9a ⇔ 2.(a^2 + 2a + 1) = 9a ⇔ 2a^2 + 4a + 2 – 9a = 0 ⇔ 2a^2 – 5a + 2 = 0

⇔ 2a^2 – 4a – a + 2 = 0 ⇔ 2a.(a – 2) – (a – 2) = 0 ⇔ (2a – 1)(a – 2) = 0

⇔ 2a – 1 = 0 hoặc a – 2 = 0

⇔ a = $\frac{1}{2}$ (nhận) hoặc a = 2 (nhận) thỏa mãn (a < –1 hoặc a > 0)

Khi –1 < a < 0 thì a + 1 và $\frac{-a-1}{a}$ cùng dấu.

Khi đó phương trình (*) ⇔ $\frac{(a+1).(-a-1)}{a} = \frac{9}{2}$ ⇔ $\frac{(a+1)^2}{a} = \frac{-9}{2}$

⇔ 2.(a + 1)^2 = –9a ⇔ 2.(a^2 + 2a + 1) = –9a ⇔ 2a^2 + 4a + 2 + 9a = 0 ⇔ 2a^2 + 13a + 2 = 0

⇔ a^2 + $\frac{13a}{2}$ + 1 = 0 ⇔ a^2 + $\frac{13a}{2} + \frac{169}{16} = \frac{153}{16}$ ⇔ $\left(\frac{a}{1} + \frac{13}{4}\right)^2 = \left(\frac{9\sqrt{17}}{4}\right)^2$

⇔ a = $\frac{9\sqrt{17}-13}{4}$ (loại) và a = $\frac{-9\sqrt{17}-13}{4}$ (loại). Không thỏa mãn (–1 < a < 0)

Với a = 2 => b = 2a + 2 = 2.2 + 2 = 6 => phương trình (d_2) là: y = 2x + 6

Với a = $\frac{1}{2}$ => b = 2a + 2 = 2.$\frac{1}{2}$ + 2 = 3 => phương trình (d_2) là: y = $\frac{x}{2}$ + 3

Câu 3.

a/ Gọi A, B là tọa độ 2 điểm biểu thị quan hệ giữa độ cao và nhiệt độ tại nơi đó

Tại mặt đất => $y_A = 0$ và $x_A = 22$ => A (22;0)

Tại vị trí $y_B = 1$ => $x_B = 22 – 6 = 16$ => B (16;1)

A thuộc hàm số: y = ax + b => 0 = 22a + b (1)

B thuộc hàm số: y = ax + b => 1 = 16a + b (2)

Lấy (2) – (1) => –6a = 1 ⇔ a = $\frac{-1}{6}$

Thế a vào (1) => b = –22a = $\frac{11}{3}$

Vậy phương trình quan hệ là: y = $\frac{-x}{6} + \frac{11}{3}$

b/ Đổi 12500m = 12,5 km ; 8000m = 8km

Nhiệt độ tại vị trí có độ cao 12,5 km là: 12,5 = $\frac{-x}{6} + \frac{11}{3}$ ⇔ x = –53 độ C.

Nhiệt độ tại vị trí có độ cao 8km là: 8 = $\frac{-x}{6} + \frac{11}{3}$ ⇔ x = –26 độ C.

Độ chênh lệch về nhiệt độ giữa 2 độ cao là: –26 – (–53) = 27 độ C

Công thức liên hệ chênh lệch nhiệt độ giữa độ F và độ C là:

$\Delta F = |F_1 – F_2| = |1,8n_1 + 32 – (1,8n_2 + 32)| = |1,8.(n_1 – n_2)| = |1,8.\Delta C|$

Độ chênh lệch về nhiệt độ giữa 2 độ cao tính theo độ F là: |1,8.27| = 48,6 độ F

c/ Nhiệt độ tối thiểu ở nơi đó tính theo độ C là:

m ≤ –76 ⇔ 1,8n + 32 ≤ –76 ⇔ n ≤ –60 độ C

Độ cao tối thiểu của nơi đó để có nhiệt độ cao nhất là –76 độ F là:

y ≥ $\frac{60}{6} + \frac{11}{3} = \frac{43}{3}$ km ~ 14,3 km

Câu 4.

a/ Vào ngày cuối tuần giá bản của sản phẩm chỉ còn : 100% - 20% = 80% = 0,8 so với giá ban đầu. Do chị Năm có thể thành viên cho nên giá bản chỉ còn 100% - 10% = 90% = 0,9 so với giá ban đầu. Vậy vào ngày cuối tuần chị Năm được bán với giá giảm

0,9 . 0,8 = 0,72 so với giá ban đầu.

Số tiền tính của của hàng = giá tiền gốc + (% VAT) .giá tiền gốc

Giá tiền của 5 lốc sữa vinamilk là: (1 + 0,08). 15000. 0,72. 5 = 58320 đồng

Giá tiền của 2 hộp sữa bò Long Thành là: (1 + 0,15). 40000. 0,72. 2 = 66240 đồng

Giá tiền của 4 gói mì ăn liền Gấu Đỏ là: (1 + 0,05). 5000. 0,72. 4 = 15120 đồng

Giá tiền chị Năm cần phải trả là: 58320 + 66240 + 15120 = 139680 đồng

b/ Gọi x là số hộp bánh su kem chị Năm có thể mua với số tiền đã có

Giá tiền của 1 hộp bánh su kem được giảm giá là: (1 + 0,1). 22000. 0,72 = 17424 đồng

Theo yêu cầu bài toán ta có điều kiện: $139680 + 17424.x \leq 200000$

$\Leftrightarrow 17424.x \leq 60320 \Leftrightarrow x \leq 3,46$

Vậy số lượng bánh su kem tối đa chị Năm có thể mua là 3 hộp

Câu 5.

Gọi a và b lần lượt là chiều dài và chiều rộng của bể nước (a > b), h là chiều cao của bể

Ta có: S(toàn phần) = S(xung quanh) + 2S đáy

$\Rightarrow 13 = 9 + 2ab \Leftrightarrow ab = 2$ (1)

Mà S(xung quanh) = h.P(đáy) P là chu vi

$\Rightarrow 9 = 1,5.2(a + b) \Rightarrow a + b = 3$ (2)

Từ (1), (2) => $(a - b)^2 = (a + b)^2 - 4ab = 3^2 - 4.2 = 1$

$\Rightarrow a - b = 1$ (do a > b) (3)

Từ (2), (3) => a = 2m; b = 1m

Thể tích của bể nước là: abh = 2.1,5.1 = $3m^3$

40% thể tích của bể nước vòi loại (I) chảy được là: 3.0,4 = $1,2m^3$

Thể tích nước còn lại của bể để vòi loại (II) chảy được là: 3 – 1,2 = $1,8m^3$

Đổi $\frac{10}{3}$ lít/ phút = 200 lít/h = 200 dm^3/h = $0,2m^3/h$

Đặt x (m^3/h) là lưu lượng chảy trong 1 giờ của vòi loại (II). (x > 0)

Đặt x + 0,2 (m^3/h) là lưu lượng chảy trong 1 giờ của vòi loại (I)

Thời gian để vòi loại (I) chảy vào bể là: $\frac{1,2}{x + 0,2}$

Thời gian để vòi loại (I) chảy vào bể là: $\frac{1,8}{x}$

Thời gian cả 2 vòi chảy đầy bể là: 11h30phút – 5h = 6h30phút = 6,5h

Theo đề bài ta có phương trình là: $\frac{1,2}{x + 0,2} + \frac{1,8}{x} = 6,5$ (*)

ĐK: x # 0 và x # – 0,2

(*) ⇔ 1,2x + 1,8.(x + 0,2) = 6,5x.(x + 0,2) ⇔ 1,2x + 1,8x + 0,36 = 6,5x^2 + 1,3x

⇔ 6,5x^2 – 1,7x – 0,36 = 0 ⇔ 650x^2 – 170x – 36 = 0 ⇔ 650x^2 – 260x + 90x – 36 = 0

⇔ 130x.(5x – 2) + 18.(5x – 2) = 0 ⇔ (130x + 18)(5x – 2) = 0

⇔ 130x + 18 = 0 (loại vì x > 0) và 5x – 2 = 0

⇔ x = 0,4 > 0 (nhận). Vậy lưu lượng chảy của vòi loại (II) là 0,4m^3/h

Lưu lượng chảy của vòi loại (I) là: 0,4 + 0,2 = 0,6m^3/h

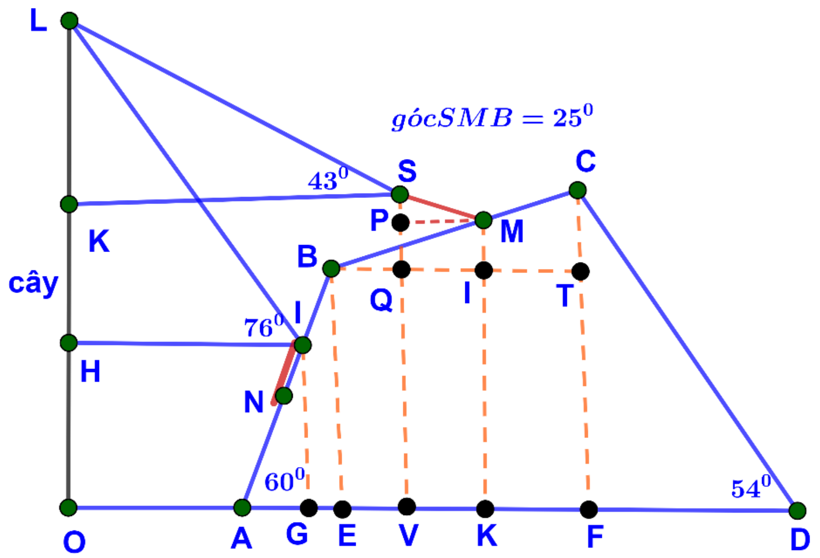
Trong 1 giờ cả 2 vòi cùng chảy được: 0,6 + 0,4 = 1m^3

Thời gian để cả 2 vòi cùng chảy một lúc đầy bể là: 3 : 1 = 3h

Thời điểm 2 vòi cùng chảy đầy bể là: 5 + 3 = 8h

Vậy cả 2 vòi cùng chảy một lúc thì đến 8 giờ sáng bể sẽ đầy nước

Câu 6.



Gọi O là gốc cây, L là đỉnh cây, H và K lần lượt là hình chiếu của mắt 2 người tại I và S lên cây. Trong đó NI = 1,5m; MS = 1,8m. Kẻ IG, BE, SV, MK, CF vuông góc với AB tại G, E, V, K, F. Kẻ MP _|_ SV tại P, BT _|_ CF tại T, BT cắt SV, MK lần lượt tại Q và I. Đặt OL = x, ta cần tìm độ dài x. Dễ thấy các quan hệ vuông góc sẽ xuất hiện các hình chữ nhật và các cạnh có độ dài bằng nhau là:

OH = IG; OK = VS, HI = OG, KS = OV, MK = PV, EF = BT, MP = QI, BQ = EV,

BE = QV = TF = IK, MP // BT, MI // CT. Ta sẽ thực hiện các tính toán

AN = BN = $\frac{AB}{2} = \frac{5,8}{2}$ = 2,9m

AI = AN + IN = 2,9 + 1,5 = 4,4m

$AE = AB.\cos(60^0) = 5{,}8 . 0{,}5 = 2{,}9m$

$AG = AI.\cos(60^0) = 4{,}4 . 0{,}5 = 2{,}2m$

$DF = DC.\cos(54^0) = 8{,}6. \cos(54^0) = 5{,}05m$

$BT = EF = AD – AE – DF = 16 – 2{,}9 – 5{,}05 = 8{,}05m$

$BE = QV = TF = IK = AB.\sin(60^0) = 5{,}8 . \sin(60^0) = 5{,}02m$

$CF = CD.\sin(54^0) = 8{,}6 . \sin(54^0) = 6{,}96m$

$CT = CF – TF = 6{,}96 – 5{,}02 = 1{,}96m$

tanCBT = $\frac{CT}{BT} = \frac{1{,}94}{8{,}05}$ => $\widehat{BMP} = \widehat{CBT} = 13{,}55^0$ (2 góc ở vị trí sole trong)

$\widehat{SMB} > \widehat{BMP}$ => $\widehat{SMP} = \widehat{SMB} - \widehat{BMP} = 25 - 13{,}55 = 11{,}45^0$

$QI = MP = MS.\cos SMP = 1{,}8 . \cos(11{,}45^0) = 1{,}76m$

Do MB = 2MC => $\frac{BI}{BT} = \frac{BM}{BC} = \frac{2}{3}$ (định lí talet trong tam giác BCT)

=> BI = $\frac{2BT}{3} = \frac{2 .\ 8{,}05}{3}$ = 5,36m

$EV = BQ = BI – QI = 5{,}36 – 1{,}76 = 3{,}6m$

$GV = GE + EV = AE – AG + EV = 2{,}9 – 2{,}2 + 3{,}6 = 4{,}3m$

$OH = IG = AI.\sin(60^0) = 4{,}4 . \sin(60^0) = 3{,}81m$

$\frac{MI}{CT} = \frac{BM}{BC} = \frac{2}{3}$ (hệ quả talet trong tam giác BCT)

=> MI = $\frac{2CT}{3} = \frac{2 .\ 1{,}94}{3}$ = 1,29m

$SP = SM.\sin SMP = 1{,}8 . \sin(11{,}45^0) = 0{,}36m$

$OK = SV = SP + PV = SP + MK = SP + MI + IK = 0{,}36 + 1{,}29 + 5{,}02 = 6{,}67m$

$HK = OK – OH = SV – IG = 6{,}67 – 3{,}81 = 2{,}86m$

$HL = OL – OH = x – 3{,}81$

$OG = HI = HL\cot(76^0) = 0{,}25.(x – 3{,}81)$

$KL = HL – HK = x – 3{,}81 – 2{,}86 = x – 6{,}67$

$OV = KS = KL.\cot(43^0) = 1{,}07.(x – 6{,}67)$

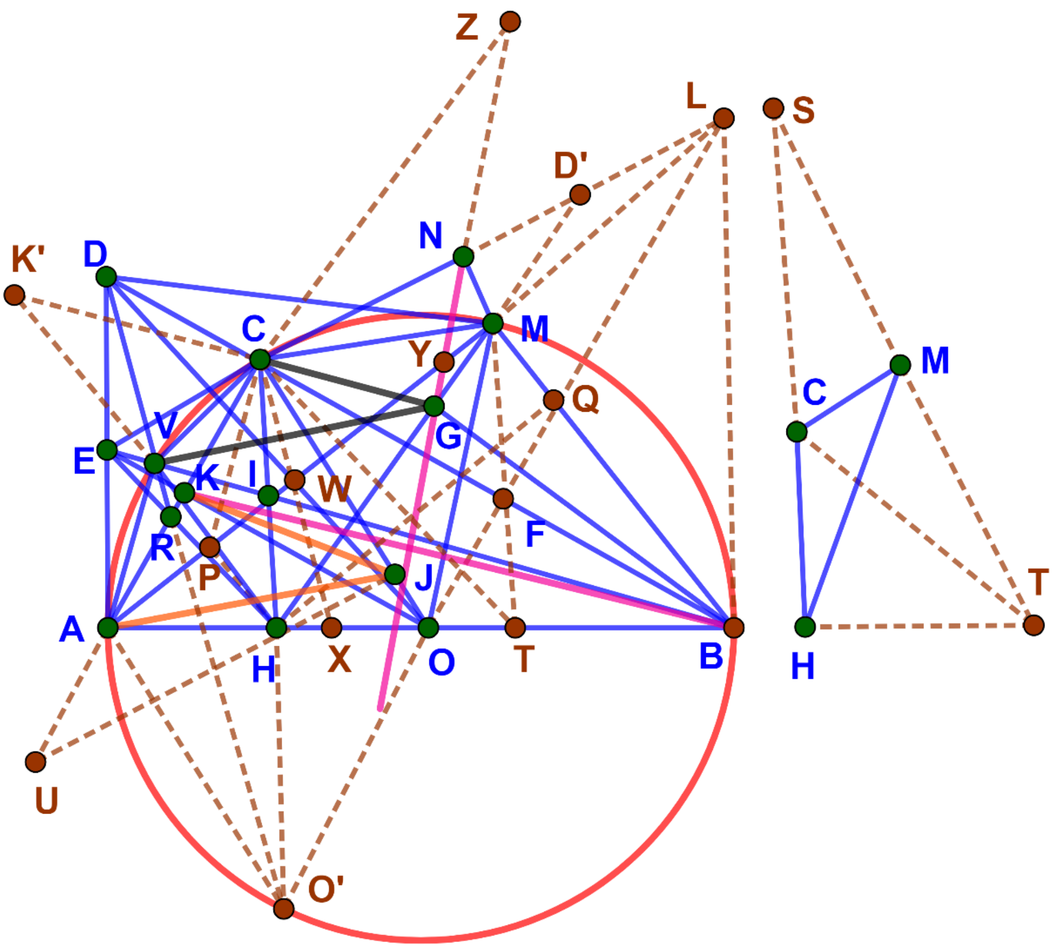
Ta có: GV = OV – OG => 4,3 = 1,07.(x – 6,67) – 0,25.(x – 3,81)

⇔ 4,3 = 1,07x – 7,1369 – 0,25x + 0,9525

⇔ 0,82x = 10,4844 ⇔ x = 12,79m

Vậy chiều cao của cây là: 12,79m

Câu 7.



a/ A, E, C, O thuộc 1 đường tròn và $2(BD^2 – OD^2) = 3(EK.BC + BH.BO)$

Xét tam giác ABC có O và K lần lượt là trung điểm của các cạnh AB và AC

=> OK là đường trung bình tam giác ABC => OK // BC hay OE // BD

Xét tam giác ABD có OA = OB và OE // BD (cmt)

=> E là trung điểm cạnh AD => EA = ED

Ta có: $\widehat{ACB} = 90^0$ (tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O) đường kính AB)

=> Tam giác ACD vuông tại C. Lại có EC là đường trung tuyến (EA = ED)

=> EA = EC = ED.

Xét tam giác EAO và tam giác ECO ta có:

OA = OC = R, EA = EC (cmt), OE là cạnh chung

=> ΔEAO = ΔECO (c – c – c) => $\widehat{ECO} = \widehat{EAO} = 90^0$

=> 4 điểm A, E, C, O cùng thuộc đường tròn đường kính OE **(đpcm)**

Ta có: các tam giác AOD và ABD vuông tại A (AD là tiếp tuyến của (O) nên

$OD^2 = AD^2 + OA^2$ và $BD^2 = AD^2 + AB^2$ (định lí pitago)

=> 2.(BD^2 – OD^2) = 2.(AD^2 + AB^2 – AD^2 – OA^2) = 2.($4R^2$ – R^2) = $6R^2$ (1)

Ta có: EA = ED (cmt) và KA = KC (gt) nên KE là đường trung bình tam giác ACD

=> CD = 2EK

Ta có: AC^2 = CD.BC (hệ thức lượng trong Δvuông ABD có AC là đường cao ($\widehat{ACB} = 90^0$)

Lại có: BC^2 = BH.AB (hệ thức lượng trong Δvuông ABC có CH là đường cao)

Mà AB = 2OB và AB^2 + BC^2 = AB^2 (Định lí pitago trong tam giác vuông ABC)

Kết hợp ta có: 3.(EK.BC + BH.BO) = $\frac{3.(CD.BC + BH.AB)}{2} = \frac{3.\left(AC^2+BC^2\right)}{2}$

$= \frac{3AB^2}{2} = \frac{3.4R^2}{2}$ = $6R^2$ (2)

Từ (1), (2) => 2(BD^2 – OD^2) = 3(EK.BC + BH.BO) **(đpcm)**

b/ MD là tiếp xúc với (O)

Ta có: AD _|_ AB và CH _|_ AB => AD // CH

Ta có: AD // CH, áp dụng liên tiếp hệ quả talet trong các tam giác ABE và ADE:

$\frac{IH}{AE} = \frac{DI}{DE} = \frac{IC}{DE}$

Mà EA = ED (cmt) => IH = IC => CH = 2IH

Xét tam giác HAC và tam giác ADB:

$\widehat{CAH} = \widehat{ADB}$ (cùng phụ với $\widehat{ABD}$), $\widehat{AHC} = \widehat{ADB} = 90^0$

=> ΔHAC ~ ΔADB (g – g) => $\frac{HC}{AH} = \frac{AB}{AD}$ (*)

Mà AB = 2OA và CH = 2IH (cmt). Từ (*) => $\frac{IH}{AH} = \frac{OA}{AD}$

Xét tam giác AOD và tam giác HIA:

$\widehat{OAD} = \widehat{IHA} = 90^0$, $\frac{IH}{AH} = \frac{OA}{AD}$ (cmt)

=> ΔAOD ~ ΔHIA (c – g – c) => $\widehat{AOD} = \widehat{AIH}$

Ta có: $\widehat{AIH} + \widehat{IAH} = 90^0$ (Tam giác IHA vuông tại H)

Suy ra $\widehat{AOD} + \widehat{IAH} = 90^0$ => $\widehat{AWO} = 90^0$ (tổng các góc tam giác AWO) => OD _|_ AM

Ta có: OA = OM = R => Tam giác AOM cân. Lại có OD là đường cao (OD _|_ AM)

=> OD là tia phân giác $\widehat{AOM}$ => $\widehat{AOD} = \widehat{MOD}$

Xét tam giác AOD và tam giác MOD:

OA = OM, $\widehat{AOD} = \widehat{MOD}$(cmt), OD là cạnh chung

=> ΔAOD = ΔMOD (c – g – c) => $\widehat{OMD} = \widehat{OAD} = 90^0$ => MD _|_ MO

Lại có M thuộc (O) nên MD là tiếp xúc với (O) **(đpcm)**

c/ $\widehat{MNG} = \widehat{CGV}$, tính $\frac{S_{\Delta DNG}}{S_{\Delta BCG}}$ khi $\frac{2tan^2AJK}{tanMNG+tanCGV} - \frac{\sqrt{3}.S_{\Delta AHC}}{S_{\Delta ABD}}$ đạt giá trị max

Gọi F là trung điểm của cạnh BC, OF cắt AM tại L

Ta có: FB = FC => OF _|_ BC (quan hệ đường kính và dây cung)

Xét tam giác OFD và tam giác OWL:

$\widehat{DOL}$ là góc chung, $\widehat{OFD} = \widehat{OWL} = 90^0$

=> ΔOFD ~ ΔOWL (g – g) => $\frac{OF}{OD} = \frac{OW}{OL}$ => OF.OL = OW.OD

Ta có: OA^2 = OW.OD (hệ thức lượng trong tam giác vuông AOD có đường cao AW)

Mà OB = OA = R. Từ đó suy ra OB^2 = OF.OL => $\frac{OF}{OB} = \frac{OB}{OL}$

Xét tam giác FOB và tam giác BOL:

$\widehat{BOL}$ là góc chung, => $\frac{OF}{OB} = \frac{OB}{OL}$ (cmt)

=> ΔFOB ~ ΔBOL (c – g – c) => $\widehat{OBL} = \widehat{OFB} = 90^0$ => BL _|_ AB

Ta có: OC = OB = R => Tam giác BOM cân. Lại có OL là đường cao (OF _|_ BC)

=> OL là tia phân giác $\widehat{BOC}$ => $\widehat{BOL} = \widehat{COL}$

Xét tam giác BOL và tam giác COL:

OA = OM, $\widehat{BOL} = \widehat{COL}$ (cmt), OL là cạnh chung

=> ΔBOL = ΔCOL (c – g – c) => $\widehat{OCL} = \widehat{OBL} = 90^0$

Mà theo như trên đã có: $\widehat{ECO} = 90^0$ => $\widehat{ECL} = \widehat{ECO} + \widehat{OCL} = 90^0 + 90^0 = 180^0$

=> 3 điểm E, C, L thẳng hàng => N thuộc cạnh CL

Ta có: $\widehat{AMB} = 90^0$ (Tam giác AMB nội tiếp đường tròn O đường kính AB) => BM _|_ AL

Ta có: BL^2 = LM.LA (hệ thức lượng tam giác ABL vuông có đường cao BL do BM _|_ AL)

Mà BL = CL (ΔBOL = ΔCOL) => CL^2 = LM.LA => $\frac{ML}{CL} = \frac{CL}{LM}$

Xét tam giác LCM và tam giác LAC:

$\widehat{CLA}$ là góc chung, => $\frac{ML}{CL} = \frac{CL}{LM}$ (cmt)

=> ΔLCM ~ ΔLAC (c – g – c) => $\widehat{LMC} = \widehat{ACL}$

Kẻ HP _|_ AL tại P, HQ _|_ BM tại Q

Xét tam giác APH và tam giác ABL:

$\widehat{BAL}$ là góc chung, $\widehat{APH} = \widehat{ABL} = 90^0$

=> ΔAPH ~ ΔABL (g – g) => $\frac{AP}{AH} = \frac{AB}{AL}$ => AP.AL = AH.AB

Mà AH.AB = AC^2 (hệ thức lượng tam giác ABC vuông có đường cao CH)

Từ đó suy ra AC^2 = AP.AL => $\frac{AP}{AC} = \frac{AC}{AL}$

Xét tam giác APC và tam giác ACL:

$\widehat{CAL}$ là góc chung, => $\frac{AP}{AC} = \frac{AC}{AL}$ (cmt)

=> ΔAPC ~ ΔACL (c – g – c) => $\widehat{APC} = \widehat{ACL}$

Mà $\widehat{LMC} = \widehat{ACL}$ (cmt) => $\widehat{APC} = \widehat{LMC}$ => $\widehat{CPM} = \widehat{CMA}$ (kề bù với 2 góc bằng nhau)

$\widehat{CPM} = \widehat{CMA}$ => Tam giác CPM cân tại C => CM = CP

Ta có: LB = LC (cmt) => Tam giác LBC cân tại L => $\widehat{LCB} = \widehat{LBC}$

Mà $\widehat{LBC} = \widehat{CAB}$ (cùng phụ với góc $\widehat{ABM}$) => $\widehat{LCB} = \widehat{CAB}$

Ta có: $\widehat{LCB} = \widehat{LCM} + \widehat{BCM}$ và $\widehat{CAB} = \widehat{LAC} + \widehat{MAB}$

Mà $\widehat{LCB} = \widehat{CAB}$ (cmt) và $\widehat{LCM} = \widehat{LAC}$ (do ΔLCM ~ ΔLAC)

Từ đó suy ra $\widehat{BCM} = \widehat{MAB}$

Mà $\widehat{MAB} = \widehat{IHP}$ (cùng phụ với góc $\widehat{AHP}$). Suy ra $\widehat{BCM} = \widehat{IHP}$

Ta có: $\widehat{CMB} = \widehat{CMA} + \widehat{AMB} = \widehat{CMA} + 90^0$

$\widehat{CPH} = \widehat{CPM} + \widehat{HPM} = \widehat{CPM} + 90^0$

Mà $\widehat{CMA} = \widehat{CPM}$ (cmt) => $\widehat{CMB} = \widehat{CPH}$

Xét tam giác HPC và tam giác CMB:

$\widehat{BCM} = \widehat{IHP}$ (cmt), $\widehat{CMB} = \widehat{CPH}$ (cmt)

=> ΔHPC ~ ΔCMB (g – g) => $\frac{HP}{PC} = \frac{MC}{MB}$ => HP.MB = CM.CP

Mà CM = CP (cmt) => HP.MB = MC^2

Xét tứ giác HPMQ ta có: $\widehat{HPM} = \widehat{HQM} = \widehat{AMB} = 90^0$

=> Tứ giác HPMQ là hình chữ nhật => HP = MQ. Từ đó suy ra MC^2 = MQ.MB

Xét tam giác MQH và tam giác MGB:

$\widehat{BMH}$ là góc chung, $\widehat{MQH} = \widehat{MGB} = 90^0$

=> ΔMQH ~ ΔMGB (g – g) => $\frac{MQ}{MH} = \frac{MG}{MB}$ => MQ.MB = MG.MH

Từ đó suy ra MC^2 = MG.MH => $\frac{MG}{MC} = \frac{MC}{MH}$

Xét tam giác MCG và tam giác MHC:

$\widehat{HMC}$ là góc chung, => $\frac{MG}{MC} = \frac{MC}{MH}$ (cmt)

=> ΔMCG ~ ΔMHC (c – g – c) => $\widehat{CHM} = \widehat{MCG}$

Cho GN cắt AM tại Y và cắt AC tại Z

Ta có: GN _|_ AK và AZ _|_ BC => $\widehat{AZG} = \widehat{CBK}$ (cùng phụ với góc $\widehat{ZKB}$)

Xét tam giác CAB và tam giác HCB:

$\widehat{ABC}$ là góc chung, $\widehat{ACB} = \widehat{CHB} = 90^0$

=> ΔCAB ~ ΔHCB (g – g) => $\frac{CA}{CB} = \frac{HC}{HB}$ (**)

Do KA = KC nên AC = 2KC, HC = 2HI nên từ (**) => $\frac{KC}{BC} = \frac{HI}{HB}$

Xét tam giác CKB và tam giác HIB:

$\widehat{KCB} = \widehat{IHB} = 90^0$, $\frac{KC}{BC} = \frac{HI}{HB}$ (cmt)

=> ΔCKB ~ ΔHIB (c – g – c) => $\widehat{CBK} = \widehat{ABI}$

Xét tam giác AHI và tam giác AMB:

$\widehat{MAB}$ là góc chung, $\widehat{AHI} = \widehat{AMB} = 90^0$

=> ΔAHI ~ ΔAMB (g – g) => $\frac{AI}{AB} = \frac{AH}{AM}$

Xét tam giác AIB và tam giác AHM:

$\widehat{MAB}$ là góc chung, $\frac{AI}{AB} = \frac{AH}{AM}$ (cmt)

=> ΔAIB ~ ΔAHM (c – g – c) => $\widehat{ABI} = \widehat{AMH}$

Từ các chứng minh trên ta có: $\widehat{AZG} = \widehat{CBK} = \widehat{ABI} = \widehat{AMH}$ hay $\widehat{AZG} = \widehat{AMG}$

Ta có: $\widehat{AZG} + \widehat{AYZ} + \widehat{ZAM} = 180^0$ (tổng các góc tam giác AYZ)

$\widehat{AMG} + \widehat{MYG} + \widehat{ZGM} = 180^0$ (tổng các góc tam giác GYM)

Mà $\widehat{AZG} = \widehat{AMG}$ (cmt) và $\widehat{AYZ} = \widehat{MYG}$ (2 góc đối đỉnh)

Từ đó suy ra $\widehat{ZAM} = \widehat{ZGM}$. Mà $\widehat{ZAM} = \widehat{LCM}$ (cmt)

=> $\widehat{LCM} = \widehat{ZGM}$ hay $\widehat{LCM} = \widehat{NGM}$

Cho HM cắt CL tại D'

Ta có: $\widehat{CMG} = \widehat{CD'G} + \widehat{LCM}$ (góc ngoài của tam giác D'CM)

$\widehat{CNG} = \widehat{CD'G} + NGM$ (góc ngoài của tam giác D'NG)

Mà $\widehat{LCM} = \widehat{NGM}$ (cmt) => $\widehat{CMG} = \widehat{CNG}$

Xét tam giác D'CM và tam giác D'GM:

$\widehat{CD'G}$ là góc chung, $\widehat{CMG} = \widehat{CNG}$ (cmt)

=> ΔD'CM ~ ΔD'GN (g – g) => $\dfrac{D'M}{D'N} = \dfrac{D'C}{D'G}$

Xét tam giác D'MN và tam giác D'CG:

$\widehat{CD'G}$ là góc chung, $\dfrac{D'M}{D'N} = \dfrac{D'C}{D'G}$ (cmt)

=> ΔD'MN ~ ΔD'CG (c – g – c)

=> $\widehat{D'NM} = \widehat{D'GC}$ => $\widehat{CNM} = \widehat{CGH}$ (kề bù với 2 góc bằng nhau)

Ta có: $\widehat{CNM} = \widehat{CNG} + \widehat{MNG}$; $\widehat{CGH} = \widehat{CMG} + \widehat{MCG}$ (góc ngoài của tam giác MCG)

Mà $\widehat{CNM} = \widehat{CGH}$ (cmt) và $\widehat{CMG} = \widehat{CNG}$ (cmt) => $\widehat{MNG} = \widehat{MCG}$

Cho CH cắt (O) tại O'; BE cắt (O) tại A'. Ta sẽ chứng minh: V trùng với A'

Ta có: AB _|_ CO' => HC = HO' (quan hệ đường kính và dây cung) => CO' = 2CH.

Lại có: AD = 2AE và AD // CO'. Áp dụng định lí ta let ta có:

$\dfrac{CO'}{AD} = \dfrac{2CH}{2AE} = \dfrac{CH}{AE} = \dfrac{CR}{AR}$. Lại có: $\widehat{DAC} = \widehat{ACO'}$ (2 góc ở vị trí sole trong do AD // CO')

Xét tam giác RAD và tam giác RCO':

$\widehat{DAC} = \widehat{ACO'}$ (cmt), $\dfrac{CO'}{CR} = \dfrac{AD}{AR}$ (cmt)

=> ΔRAD ~ ΔRCO (c – g – c) => $\widehat{ARD} = \widehat{CRO'}$

=> $\widehat{DRO} = \widehat{ARD} + \widehat{ARO'} = \widehat{CRO'} + \widehat{ARO'} = \widehat{ARC} = 180^0$

=> 3 điểm D, R, O' thẳng hàng

OB = OA' = R => Tam giác OBA' cân tại O => $\widehat{OA'B} = \dfrac{180^0 - \widehat{A'OB}}{2}$

OO' = OA' = R => Tam giác OO'A' cân tại O => $\widehat{OA'O'} = \dfrac{180^0 - \widehat{A'OO'}}{2}$

OA = OO' = R => Tam giác OAO' cân tại O => $\widehat{OAO'} = \widehat{OO'A}$

Mà $\widehat{BOO'} = \widehat{OAO'} = \widehat{OO'A} = 2\widehat{OAO'} = 2\widehat{HAO'}$ (góc ngoài tam giác AOO')

Từ đó suy ra: $\widehat{BA'O'} = \widehat{OA'B} + \widehat{OA'O'} = \frac{180^0 - \widehat{A'OB}}{2} + \frac{180^0 - \widehat{A'OO'}}{2}$

$= \frac{360^0 - \widehat{A'OB} - \widehat{A'OO'}}{2} = \frac{\widehat{BOO'}}{2} = \widehat{HAO'} \Rightarrow \widehat{BA'O'} = \widehat{HA'O'}$

Ta có: AB _|_ CO' và HC = HO' => AB là đường trung trực cạnh CO' => $\widehat{HAO'} = \widehat{CAB}$

Mà $\widehat{CAB} = \widehat{ADB}$ (cùng phụ với $\widehat{DAC}$)

Ta có: $\widehat{AA'B} = 90^0$ (Tam giác AA'B nội tiếp đường tròn O đường kính AB) => AA' _|_ BE

$AE^2 = EA'.BE$ (hệ thức lượng trong tam giác vuông ABE có đường cao AA')

Mà AE = DE => $DE^2 = EA'.BE$ => $\frac{EA'}{DE} = \frac{DE}{BE}$

Xét tam giác EA'D và tam giác EDB:

$\widehat{DEB}$ là góc chung, $\frac{EA'}{DE} = \frac{DE}{BE}$ (cmt)

=> ΔEA'D ~ ΔEDB (c – g – c) => $\widehat{ADB} = \widehat{EA'D}$

Từ các chứng minh trên ta có: $\widehat{BA'O'} = \widehat{HAO'} = \widehat{CAB} = \widehat{ADB} = \widehat{EA'D}$

Ta có: $\widehat{DA'O'} = \widehat{BA'O'} + \widehat{DA'B} = \widehat{EA'D} + \widehat{DA'B} = \widehat{EA'B} = 180^0$

=> 3 điểm D, A', O' thẳng hàng

Theo như trên đã có 3 điểm D, R, O' thẳng hàng

=> 4 điểm D, A', R, O' thẳng hàng => DR cắt BE tại A'

Mà DR cắt BE tại V => A' trùng với V. Mà A' thuộc (O) => V thuộc (O)

A' trùng với V => $\widehat{AVB} = \widehat{AA'B} = 90^0$

Xét tam giác BHI và tam giác BVA:

$\widehat{ABV}$ là góc chung, $\widehat{IHB} = \widehat{AVB} = 90^0$

=> ΔBHI ~ ΔBVA (g – g) => $\frac{BH}{BV} = \frac{BI}{AB}$

Xét tam giác AIB và tam giác VHB:

$\widehat{ABV}$ là góc chung, $\frac{BH}{BV} = \frac{BI}{AB}$ (cmt)

=> ΔAIB ~ ΔVHB (c – g – c)

Theo như trên đã có: ΔAIB ~ ΔAHM => ΔVHB ~ ΔAHM

=> $\frac{AH}{MH}=\frac{HV}{HB}$ và $\widehat{AHM}=\widehat{BHV}$

Từ $\frac{AH}{MH}=\frac{HV}{HB}$ => HV.HM = HA.HB

Mà HA.HB = HC^2 (hệ thức lượng tam giác vuông ABC có đường cao CH)

=> HC^2 = HV.HM => $\frac{HV}{HC}=\frac{HC}{HM}$

Đã có: $\widehat{AHM}=\widehat{BHV}$ => $\widehat{AHC}+\widehat{CHM}=\widehat{CHB}+\widehat{CHV}$

=> $\widehat{CHM}=\widehat{CHV}$ (do $\widehat{AHB}=\widehat{AHC}=90^0$)

Xét tam giác CHM và tam giác VHC:

$\widehat{CHM}=\widehat{CHV}$ (cmt), $\frac{HV}{HC}=\frac{HC}{HM}$ (cmt)

=> ΔCHM ~ ΔVHC (c – g – c) => $\widehat{CVH}=\widehat{MCH}$

Cho HV cắt CG tại K'. Mà $\widehat{MCH}=\widehat{CGM}$ (do ΔMCG ~ ΔMHC)

=> $\widehat{CVH}=\widehat{CGM}$ => $\widehat{CVK'}=\widehat{CGH}$ (kề bù với 2 góc bằng nhau)

Xét tam giác K'CV và tam giác K'HG:

$\widehat{HK'G}$ là góc chung, $\widehat{CVK'}=\widehat{CGH}$ (cmt)

=> ΔK'CV ~ ΔK'HG (g – g) => $\frac{K'V}{K'G}=\frac{K'C}{K'H}$

Xét tam giác K'CH và tam giác K'VG:

$\widehat{HK'G}$ là góc chung, $\frac{K'V}{K'G}=\frac{K'C}{K'H}$ (cmt)

=> ΔK'CH ~ ΔK'VG (c – g – c) => $\widehat{CHV}=\widehat{CGV}$.Từ các chứng minh trên cho

: $\widehat{MNG}=\widehat{MCG}=\widehat{CHM}=\widehat{CHV}=\widehat{CGV}$ => $\widehat{MNG}=\widehat{CGV}$ **(đpcm)**

Cho MF cắt OB tại T.

Ta có: BL^2 = LF.LO (hệ thức lượng trong tam giác vuông BOL có đường cao BF)

Mà BL^2 = LM.LA (cmt) => LF.LO = LM.LA => $\frac{LM}{LF}=\frac{LO}{LA}$

Xét tam giác LMF và tam giác LOA:

$\widehat{ALO}$ là góc chung, $\frac{LM}{LF}=\frac{LO}{LA}$ (cmt)

=> ΔLMF ~ ΔLOA (c – g – c) => $\widehat{LFM}=\widehat{LAO}$

Mà $\widehat{LFM}=\widehat{OFT}$ (2 góc đối đỉnh) => $\widehat{LAO}=\widehat{OFT}$

Xét tam giác TFO và tam giác TAM:

$\widehat{ATM}$ là góc chung, $\widehat{LAO} = \widehat{OFT}$ (cmt)

=> ΔTFO ~ ΔTAM (g – g) => $\frac{TF}{TO} = \frac{TA}{TM}$ => TO.TA = TF.TM

Ta có: $\widehat{LAO} = \widehat{OFT}$ (cmt) => $\widehat{MBA} = \widehat{BFT}$ (cùng phụ với 2 góc bằng nhau)

Xét tam giác TBF và tam giác TMB:

$\widehat{MTB}$ là góc chung, $\widehat{MBA} = \widehat{BFT}$(cmt)

=> ΔTBF ~ ΔTMB (g – g) => $\frac{TB}{TF} = \frac{TM}{TB}$ => TF.TM = TB^2

Từ đó suy ra: TB^2 = TO.TA ⇔ TB^2 = (OB – TB).(AB – BT) = (R – TB).(2R – BT)

⇔ $BT^2 = 2R^2$ – R.BT – 2R.BT + TB^2 ⇔ $2R^2$ = 3R.BT ⇔ BT = $\frac{2R}{3} = \frac{AB}{3}$

=> AB = 3BT => AT = 2BT

Đã có: $\widehat{ACL} = \widehat{CML}$ (cmt) => $\widehat{AMC} = \widehat{ACE}$ (cùng kề bù với 2 góc bằng nhau)

Mà AE = EC (cmt) => Tam giác AEC cân tại E => $\widehat{ACE} = \widehat{EAC}$

Mà $\widehat{EAC} = \widehat{ABC}$ (cùng phụ với góc $\widehat{CAB}$)

Lại có: $\widehat{ABC} = \widehat{BMF}$ (do ΔTFB ~ ΔTBM)

Từ đó suy ra $\widehat{AMC} = \widehat{BMF}$ => $\widehat{CMF} = \widehat{AMB} = 90^0$ (cùng cộng thêm cho góc $\widehat{HMF}$)

Xét tứ giác CHMT có $\widehat{CMT} = \widehat{CHT} = 90^0$

Nếu $\widehat{MTH} = 90^0$ thì tứ giác CHTM là hình chữ nhật => $\widehat{CHM} = \widehat{CTM}$

Nếu $\widehat{MTH}$ # 90^0, cho CH cắt MT tại S => $\widehat{CMS} = 90^0$

Xét tam giác SMC và tam giác SHT:

$\widehat{HST}$ là góc chung, $\widehat{CMS} = \widehat{SHT} = 90^0$

=> ΔSMC ~ ΔSHT (g – g) => $\frac{SM}{SH} = \frac{SC}{ST}$

Xét tam giác SMH và tam giác SCT:

$\widehat{HST}$ là góc chung, $\frac{SM}{SH} = \frac{SC}{ST}$ (cmt)

=> ΔSMH ~ ΔSCT (c – g – c) => $\widehat{CHM} = \widehat{CTM}$

Tóm lại trong mọi trường hợp ta luôn có $\widehat{CHM} = \widehat{CTM}$ hay $\widehat{CHM} = \widehat{CTF}$

Gọi X là trung điểm của cạnh AT => AT = 2XT.

Mà AT = 2BT (cmt) => XT = BT

Xét tam giác CXB có XT = BT và FC = FB

=> FT là đường trung bình tam giác CXB => XC // TF => $\widehat{CTF} = \widehat{XCT}$ (2 góc solo trong)

Ta có: $\widehat{AIH} = \widehat{CHM} + \widehat{AMH}$ (góc ngoài của tam giác HIM)

Lại có: $\widehat{AMB} = \widehat{MBI} + \widehat{ABI}$

Mà $\widehat{AIH} = \widehat{AMB}$ (ΔAIH ~ ΔABM) và $\widehat{AMH} = \widehat{ABI}$ (cmt) => $\widehat{CHM} = \widehat{MBI}$

Gọi U là điểm đối xứng K qua A => KC = KA = AU => AK = $\frac{AC}{2}$ và CU = $\frac{3AC}{2}$

Theo đề bài: 2CJ = 3AH và AB = 2OC = 2R và AC^2 = AH.AB (hệ thức lượng trong tam giác vuông ABC có đường cao CH)

=> CJ.CO = $\frac{3AH}{2}.\frac{AB}{2} = \frac{3AC^2}{4} = \frac{AC}{2}.\frac{3AC}{2} =$ CK.CU => $\frac{CJ}{CU} = \frac{CK}{CO}$

Xét tam giác CKO và tam giác CJU:

$\widehat{UCO}$ là góc chung, $\frac{CJ}{CU} = \frac{CK}{CO}$ (cmt)

=> ΔCKO ~ ΔCJU (c – g – c) => $\widehat{CKO} = \widehat{CJU} = 90^0$

Ta có: OC = OA = R => Tam giác OAC cân tại O => $\widehat{CAB} = \widehat{ACO}$

Xét tam giác CAB và tam giác JCU:

$\widehat{CAB} = \widehat{ACO}$ (cmt) ; $\widehat{ACB} = \widehat{CJU} = 90^0$

=> ΔCAB ~ ΔJCU (g – g) => $\frac{AC}{AB} = \frac{CJ}{CU}$

Theo đề bài ta có:KC = AK = UA => CU = 3CK và AB = 3AX. Từ đó suy ra $\frac{AC}{AX} = \frac{CJ}{CK}$

Xét tam giác ACX và tam giác CJK:

$\widehat{CAB} = \widehat{ACO}$ (cmt) ; $\frac{AC}{AX} = \frac{CJ}{CK}$ (cmt)

=> ΔACX ~ ΔCJK (c – g – c) => $\frac{XA}{XC} = \frac{KC}{KJ}$ và $\widehat{AXC} = \widehat{CKJ}$

Từ $\widehat{AXC} = \widehat{CKJ}$ => $\widehat{CXB} = \widehat{AKJ}$ (kề bù với 2 góc bằng nhau).

Lại có: XA = XT và KC = AK => $\frac{XT}{XC} = \frac{AK}{KJ}$

Xét tam giác XTC và tam giác KAJ:

$\widehat{CXB} = \widehat{AKJ}$ (cmt); $\frac{XT}{XC} = \frac{AK}{KJ}$ (cmt)

=> ΔXTC ~ ΔKAJ (c – g – c) => $\widehat{XCT} = \widehat{AJK}$

Từ các chứng minh trên có: $\widehat{MNG} = \widehat{CHM} = \widehat{CHV} = \widehat{CGV} = \widehat{MBI} = \widehat{CTM} = \widehat{XCT} = \widehat{AJK}$

=> TanMNG = tanCGV = tanAJK = tanMBI

Do đó: $\frac{2tan^2AJK}{tanMNG+tanCGV} = \frac{2tan^2MBI}{tanMBI+tanMBI}$ = tanMBI

Ta sẽ đi tính tanMBI. Tam giác MBI vuông tại M cho: tan MBI = $\frac{MI}{MB}$

Đặt AC = m; BC = n ; $\widehat{CAB}$ = a thì cosa = $\frac{AC}{AB}$; sina = $\frac{BC}{AB}$

Theo như trên ta có: AB = $\sqrt{AC^2 + AB^2} = \sqrt{m^2 + n^2}$

Áp dụng các hệ thức lượng trong tam giác vuông CAB có đường cao CH:

AC.BC = CH.AB => CH = $\frac{AC.BC}{AB} = \frac{mn}{\sqrt{m^2+n^2}}$

AC^2 = AH.AB => AH = $\frac{AC^2}{AB} = \frac{m^2}{\sqrt{m^2+n^2}}$

BC^2 = BH.AB => BH = $\frac{BC^2}{AB} = \frac{n^2}{\sqrt{m^2+n^2}}$

Lại có: IH = $\frac{CH}{2} = \frac{mn}{2.\sqrt{m^2+n^2}}$. Tam giác AHI vuông tại H cho:

$AI^2 = AH^2 + HI^2 = \frac{m^4}{m^2+n^2} + \frac{m^2.n^2}{4.(m^2+n^2)} = \frac{m^2.(4m^2+n^2)}{4.(m^2+n^2)}$

=> AI = $\frac{m.\sqrt{4m^2+n^2}}{2.\sqrt{m^2+n^2}}$. Theo như trên đã có: $\frac{AI}{AB} = \frac{AH}{AM}$ => AI.AM = AH.AB

Mà AH.AB = AC^2 => AC^2 = AI.AM => AM = $\frac{AC^2}{AI} = \frac{m^2.2\sqrt{m^2+n^2}}{m.\sqrt{4m^2+n^2}} = \frac{2m\sqrt{m^2+n^2}}{\sqrt{4m^2+n^2}}$

MI = AM – AI = $\frac{2m\sqrt{m^2+n^2}}{\sqrt{4m^2+n^2}} - \frac{m.\sqrt{4m^2+n^2}}{2.\sqrt{m^2+n^2}}$

$= \frac{m.[4.(m^2+n^2)-(4m^2+n^2)]}{2.\sqrt{m^2+n^2}.\sqrt{4m^2+n^2}} = \frac{3mn^2}{2.\sqrt{m^2+n^2}.\sqrt{4m^2+n^2}}$

Đã có: ΔAHI ~ ΔAMB (cmt) => $\frac{HI}{MB} = \frac{AI}{AB}$

=> MB = $\frac{AB.HI}{AI} = \frac{\sqrt{m^2+n^2}}{1} . \frac{mn}{2.\sqrt{m^2+n^2}} . \frac{2.\sqrt{m^2+n^2}}{m.\sqrt{4m^2+n^2}} = \frac{n\sqrt{m^2+n^2}}{\sqrt{4m^2+n^2}}$

=> tanMBI = $\frac{MI}{MB}=\frac{3mn^2}{2.\sqrt{m^2+n^2}.\sqrt{4m^2+n^2}}.\frac{\sqrt{4m^2+n^2}}{n.\sqrt{m^2+n^2}}=\frac{3mn}{2.(m^2+n^2)}$

= $\frac{3AC.BC}{2AB^2}=\frac{3}{2}.\frac{AC}{AB}.\frac{BC}{AB}=\frac{3sina.cosa}{2}$

Ta có: AC = AB.cosCAB = AB.cosa (tỉ số lượng giác tam giác vuông ABC)

Lại có $\widehat{ADB}=\widehat{CAB}=a$ (cùng phụ với $\widehat{CAD}$)

=> AB = BD.sinADB = BD.sina (tỉ số lượng giác tam giác vuông ABD)

Từ đó suy ra AC = BD.sina.cosa => $\frac{AC}{BD}$ = sina.cosa

Theo như trên đã có: ΔHAC ~ ΔADB => $\frac{S_{\Delta HAC}}{S_{\Delta ADB}}=\frac{AC^2}{BD^2}$ = $\sin^2$a.$\cos^2$a

Vậy: $\frac{2tan^2AJK}{tanMNG+tanCGV}-\frac{\sqrt{3}.S_{\Delta HAC}}{S_{\Delta ADB}}=\frac{3sina.cosa}{2}-\sqrt{3}.$ $\sin^2$a.$\cos^2$a

= $-\sqrt{3}.\left(\frac{sin^2a.cos^2a}{1}-\frac{\sqrt{3}.sina.cosa}{2}\right)$

= $-\sqrt{3}.\left(\frac{sin^2a.cos^2a}{1}-\frac{\sqrt{3}.sina.cosa}{2}+\frac{3}{16}-\frac{3}{16}\right)$

= $-\sqrt{3}.\left(\frac{sina.cosa}{1}-\frac{\sqrt{3}}{4}\right)^2+\frac{3\sqrt{3}}{16}\le\frac{3\sqrt{3}}{16}$. Dấu = xảy ra khi sina.cosa = $\frac{\sqrt{3}}{4}$. Khi đó biểu thức: $\frac{2tan^2AJK}{tanMNG+tanCGV}-\frac{\sqrt{3}.S_{\Delta HAC}}{S_{\Delta ADB}}$ đạt giá trị lớn nhất sẽ là $\frac{3\sqrt{3}}{16}$

Áp dụng công thức: $\sin^2$a + $\cos^2$a = 1

Ta có: sina.cosa = $\frac{\sqrt{3}}{4}$ => $\sin^2$a.$\cos^2$a = $\frac{3}{16}$ ⇔ 16$\cos^2$a.(1 – $\cos^2$a) = 3

⇔ 16$\cos^4$a – 16$\cos^2$a + 3 = 0 ⇔ 16$\cos^4$a – 4$\cos^2$a – 12$\cos^2$a + 3 = 0

⇔ 4$\cos^2$a.(4$\cos^2$a – 1) – 3.(4$\cos^2$a – 1) = 0 ⇔ (4$\cos^2$a – 3)(4$\cos^2$a – 1) = 0

⇔ 4$\cos^2$a – 3 = 0 hoặc 4$\cos^2$a – 1 = 0

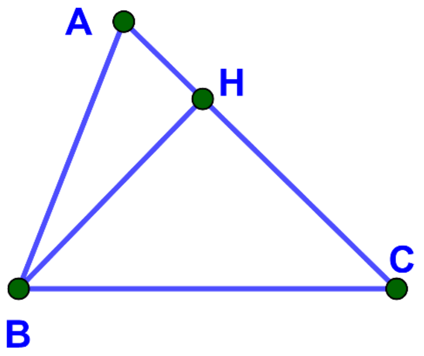
⇔ $\cos^2$a = $\frac{3}{4}$ hoặc $\cos^2$a = $\frac{1}{4}$

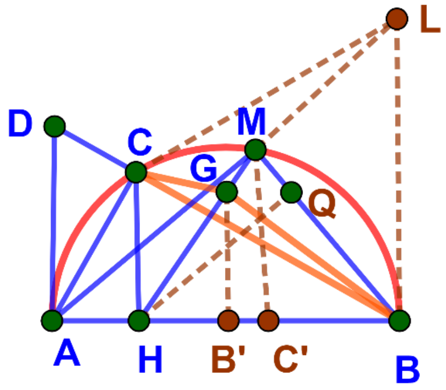
Theo yêu cầu trên phải có: AC < BC ⇔ $\frac{AC}{AB}<\frac{BC}{AB}$ ⇔ cosa < sina ⇔ $\cos^2$a < $\sin^2$a

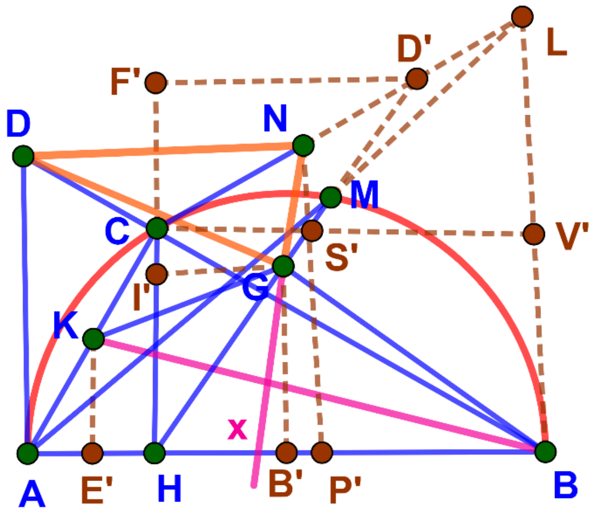
$\Leftrightarrow$ $2\cos^2 a < \sin^2 a + \cos^2 a \Leftrightarrow \cos^2 a < \frac{1}{2}$.

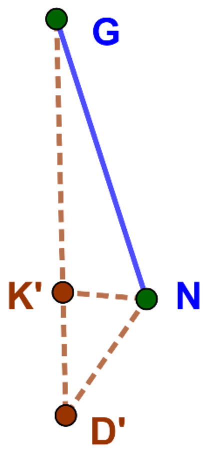
Đối chiếu điều kiện ta nhận $\cos^2 a = \frac{1}{4} \Leftrightarrow \cos a = \frac{1}{2} \Leftrightarrow a = 60^0$

Ta sẽ tính diện tích các tam giác DNG và BCG theo R khi $\widehat{CAB} = 60^0$









Trước khi tính toán ta cần có 1 bài toán phụ:

Bài toán phụ: Cho tam giác ABC có góc A nhọn thì cosA = $\frac{AB^2+AC^2-BC^2}{2AB.AC}$

Chứng minh bài toán phụ: Nếu góc C nhọn thì kẻ BH _|_ AC tại H => H thuộc cạnh AC

Từ các tam giác vuông AHB và BHC cho: AH = AB.cosA

Ta có: $BC^2 = BH^2 + HC^2 = BH^2 + (AC - AH)^2 = BH^2 + AH^2 + AC^2 - 2AH.AC$

$= AB^2 + AC^2 - 2AB.AC.\cos A$

Từ đó suy ra: $\cos A = \frac{AB^2+AC^2-BC^2}{2AB.AC}$

Trường hợp C là góc tù => góc B nhọn thì kẻ CH _|_ AB tại H thì H thuộc cạnh AB. Chứng minh tương tự ta cũng thu được kết quả trên.

Bài toán phụ đã được giải quyết. Quay trở lại bài toán chính. Khi $\widehat{CAB} = 60^0$ thì:

Xét trong tam giác ABC vuông tại C có:

AC = AB.cosCAB = 2R.cos(60^0) = R

BC = AB.sinCAB = 2R.sin(60^0) = R$\sqrt{3}$

AC.BC = CH.AB (cmt) => CH = $\frac{AC.BC}{AB} = \frac{R.R\sqrt{3}}{2R} = \frac{R\sqrt{3}}{2}$

AH = AC.cosCAB (tỉ số lượng giác tam giác vuông AHC) = R.cos(60^0) = $\frac{R}{2}$

BH = AB – AH = 2R – $\frac{R}{2} = \frac{3R}{2}$

Từ AC _|_ BC và OL _|_ BC => OL // AC => $\widehat{LOB} = \widehat{CAB} = 60^0$ (2 góc soloe trong)

Tam giác BOL vuông tại B nên: BL = OB.tanLOB = R.tan(60^0) = R$\sqrt{3}$

$AL^2 = AB^2 + BL^2$ (định lí pitago trong tam giác vuông ABL)

=> AL = $\sqrt{AB^2 + BL^2} = \sqrt{4R^2 + 3R^2} = R\sqrt{7}$

AB.BL = AL.BM (hệ thức lượng trong tam giác vuông ABL có đường cao BM)

=>a BM = $\frac{AB.BL}{AL} = \frac{2R.R\sqrt{3}}{R\sqrt{7}} = \frac{2\sqrt{21}.R}{7}$

Kẻ MC’ _|_ AB tại C’ ; GB’ _|_ AB tại B’

Ta có: MB^2 = BC’.AB (hệ thức lượng trong tam giác vuông AMB)

=> BC’ = $\frac{MB^2}{AB} = \left(\frac{2\sqrt{21}.R}{7}\right)^2.\frac{1}{2R} = \frac{6R}{7}$

$C'M^2 = BM^2 - BC'^2$ (định lí pitago trong tam giác vuông MC’B)

=>a CM = $\sqrt{BM^2 - BC'^2} = \sqrt{\left(\frac{2\sqrt{21}.R}{7}\right)^2 - \left(\frac{6R}{7}\right)^2} = \frac{4\sqrt{3}.R}{7}$

Ta có: AM _|_ MB và HQ _|_ MB => AM // HQ. Áp dụng định lí talet trong tam giác AMB

$\frac{AH}{AB} = \frac{MQ}{MB}$ => MQ = $\frac{AH.MB}{AB} = \frac{R}{2}.\frac{2\sqrt{21}.R}{7}.\frac{1}{2R} = \frac{\sqrt{21}.R}{4}$

HC’ = HB – C’B = $\frac{3R}{2} - \frac{6R}{7} = \frac{9R}{14}$

$HM^2 = MC'^2 + HC'^2$ (định lí pitago trong tam giác vuông MC’H)

=> HM = $\sqrt{MC'^2 + HC'^2}$ = $\sqrt{\left(\frac{9R}{14}\right)^2 + \left(\frac{4\sqrt{3}.R}{7}\right)^2} = \frac{\sqrt{273}.R}{14}$

Theo như trên đã có: MG.MH = MQ.MB

=> MG = $\frac{MQ.MB}{MH} = \frac{\sqrt{21}.R}{14}.\frac{2\sqrt{21}.R}{7}.\frac{14}{\sqrt{273}.R} = \frac{2\sqrt{273}.R}{91}$

Ta có: MC' _|_ AB và GB' _|_ AB => MC' // GB'. Áp dụng định lí talet trong tam giác MHC': $\frac{MG}{MH} = \frac{B'C'}{HC'}$ => B'C' = $\frac{MG.HC'}{MH} = \frac{2\sqrt{273}.R}{91}.\frac{9R}{14}.\frac{14}{\sqrt{273}.R} = \frac{18R}{91}$

BB' = B'C' + BC' = $\frac{18R}{91} + \frac{6R}{7} = \frac{96R}{91}$

HB' = HB – BB' = $\frac{3R}{2} - \frac{96R}{91} = \frac{81R}{182}$

$\frac{B'G}{MC'} = \frac{HB'}{HC'}$ => B'G = $\frac{HB'.MC'}{HC'} = \frac{81R}{182}.\frac{4\sqrt{3}.R}{7}.\frac{14}{9R} = \frac{36\sqrt{3}.R}{91}$

Do CH _|_ BH nên: $S_{\Delta BHC} = \frac{HB.HC}{2} = \frac{3R}{2}.\frac{R\sqrt{3}}{2}.\frac{1}{2} = \frac{3\sqrt{3}.R^2}{8}$

Do CH _|_ BH và GB' _|_ AB nên tứ giác CHB'G là hình thang vuông nên:

$$S_{CHB'G} = \frac{(CH+B'G).HB'}{2} = \left(\frac{R\sqrt{3}}{2} + \frac{36\sqrt{3}.R}{91}\right).\frac{81R}{182}.\frac{1}{2} = \frac{13203\sqrt{3}.R^2}{66248}$$

Do GB' _|_ BB' nên: $S_{\Delta BB'G} = \frac{B'G.BB'}{2} = \frac{36\sqrt{3}.R}{91}.\frac{96R}{91}.\frac{1}{2} = \frac{3456\sqrt{3}.R^2}{16562}$

$$S_{CHB'G} + S_{\Delta BB'G} = \frac{13203\sqrt{3}.R^2}{66248} + \frac{3456\sqrt{3}.R^2}{16562} = \frac{297\sqrt{3}.R^2}{728}$$

Do $\frac{297\sqrt{3}.R^2}{728} > \frac{3\sqrt{3}.R^2}{8}$ => $S_{CHB'G} + S_{\Delta BB'G} > S_{\Delta BHC}$

=> G nằm bên ngoài tam giác BHC

Nên: $S_{\Delta BCG} = S_{CHB'G} + S_{\Delta BB'G} - S_{\Delta BHC} = \frac{297\sqrt{3}.R^2}{728} - \frac{3\sqrt{3}.R^2}{8} = \frac{3\sqrt{3}.R^2}{91}$

$\widehat{ABC} = 90^0 - \widehat{CAB} = 90^0 - 60^0 = 30^0$

Trong tam giác vuông ABD: AD = AB.tanABC = 2R.tan(30^0) = $\frac{2R\sqrt{3}}{3}$

AB’ = AB – BB’ = $\frac{2R}{1} - \frac{96R}{91} = \frac{86R}{91}$

$\widehat{LBC} = 90^0 - \widehat{ABC} = 90^0 - 30^0 = 60^0$

Lại có: LB = LC => tam giác LBC đều => $\widehat{BLC} = 60^0$

Kẻ D’F’ _|_ HC tại F’. Do HC _|_ AB và AB _|_ BL

=> CH // BL => $\widehat{D'CF'} = \widehat{BLC} = 60^0$ (2 góc sole trong)

Theo như trên đã có: tanCHM = $\frac{3sina.cosa}{2} = \frac{3}{2}.\frac{\sqrt{3}}{4} = \frac{3\sqrt{3}}{8}$

=> cotCHM = $\frac{1}{tanCHM} = \frac{8}{3\sqrt{3}} = \frac{8\sqrt{3}}{9}$

Từ các tam giác vuông CF’D’ và HF’D’ vuông tại F’ cho:

F’C = F’D.cotD’CF’ = F’D.cot(60^0) = $\frac{F'D.\sqrt{3}}{3}$

F’H = F’D.cotCHM = $\frac{F'D.8\sqrt{3}}{9}$

Lại có: CH = F’H – F’C => $\frac{R\sqrt{3}}{2} = \frac{F'D.8\sqrt{3}}{9} - \frac{F'D.\sqrt{3}}{3}$

⇔ $\frac{R\sqrt{3}}{2} = \frac{F'D.5\sqrt{3}}{9}$ ⇔ F’D = $\frac{9R}{10}$

Từ đó suy ra CF’ = $\frac{F'D.\sqrt{3}}{3} = \frac{9R}{10}.\frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{3\sqrt{3}.R}{10}$

CD’ = $\frac{CF\prime}{cosD\prime CF\prime} = \frac{CF\prime}{cos60^0} = \frac{3\sqrt{3}.R}{10} : \frac{1}{2} = \frac{3\sqrt{3}.R}{5}$

Kẻ GI’ _|_ CH tại I’. Xét tứ giác HI’GB’ có $\widehat{CHB'} = \widehat{HB'G} = \widehat{GI'H} = 90^0$

=>a Tứ giác HI’GB’ là hình chữ nhật => HI’ = B’G = $\frac{36\sqrt{3}.R}{91}$

I’C = CH – HI’ = $\frac{R\sqrt{3}}{2} - \frac{36\sqrt{3}.R}{91} = \frac{19\sqrt{3}.R}{182}$

I’F’ = I’C + CF’ = $\frac{19\sqrt{3}.R}{182} + \frac{3\sqrt{3}.R}{10} = \frac{184\sqrt{3}.R}{455}$

HG = HM – MG = $\frac{\sqrt{273}.R}{14} - \frac{2\sqrt{273}.R}{91} = \frac{9\sqrt{273}.R}{182}$

D’F’ _|_ CH và GI’ _|_ CH => F’D’ // GI’. Áp dụng định lí talet trong tam giác HF’D’

$\frac{I\prime H}{I\prime F\prime} = \frac{GH}{GD\prime}$ => GD’ = $\frac{I\prime F\prime.GH}{I\prime H} = \frac{184\sqrt{3}.R}{455}.\frac{9\sqrt{273}.R}{182}.\frac{91}{36\sqrt{3}.R} = \frac{23\sqrt{273}.R}{455}$

Gọi E’ là trung điểm của cạnh AH, lại có K là trung điểm của cạnh AC

=> KE’ là đường trung bình của tam giác AHC

=> HE’ = $\frac{AH}{2} = \frac{R}{4}$; KE’ = $\frac{HC}{2} = \frac{R\sqrt{3}}{4}$

E’B’ = E’H + B’H = $\frac{R}{4} + \frac{81R}{182} = \frac{253R}{364}$

Do KE’ _|_ AB và GB’ _|_ AB nên độ dài KG được tính bằng:

KG^2 = (B’G – KE)^2 + E’B’^{2} = $\left(\frac{36\sqrt{3}.R}{91} - \frac{R\sqrt{3}}{4}\right)^2 + \left(\frac{253R}{364}\right)^2 = \frac{199R^2}{364}$

K là trung điểm cạnh AC nên: KC = $\frac{AC}{2} = \frac{R}{2}$

Tam giác BCK vuông tại C nên: BK = $\sqrt{KC^2 + BC^2} = \sqrt{\frac{R^2}{4} + \frac{3R^2}{1}} = \frac{\sqrt{13}.R}{2}$

Tam giác BGM vuông tại G nên:

BG = $\sqrt{MB^2 - MG^2} = \sqrt{\left(\frac{2\sqrt{21}.R}{7}\right)^2 - \left(\frac{2\sqrt{273}.R}{91}\right)^2} = \frac{12\sqrt{91}.R}{91}$

Gọi Gx là tia đối của tia GN

Do HG _|_ BG và Gx _|_ BK => Gx nằm giữa GH và GB => N thuộc cạnh CD’

Ta có: $\widehat{NGD'} = \widehat{HGx}$ (2 góc đối đỉnh).

Mà $\widehat{HGx} = \widehat{KBG}$ (cùng phụ với góc $\widehat{BGx}$).

Từ đó suy ra $\widehat{NGD'} = \widehat{KBG}$ => cosNGD’ = cosKBG

Ta có: $\widehat{MHB} < \widehat{CHB} = 90^0$ => $\widehat{MHB}$ là góc nhọn, lại có góc $\widehat{MBA}$ là góc nhọn

=>a G thuộc cạnh HM, K thuộc cạnh AC => $\widehat{KBG} < \widehat{ABL} = 90^0$ => $\widehat{KBG}$ là góc nhọn

Mà lại có: $\widehat{LCH} > \widehat{LCO} = 90^0$ => $\widehat{LCH}$ là góc tù

Trong tam giác CHD’ có $\widehat{LCH}$ là góc tù => $\widehat{CD'H}$ là góc nhọn.

Từ đó áp dụng bài toán phụ ta có:

cosNGD’ = cosKBG = $\frac{BG^2+BK^2-KG^2}{2BG.BK}$

$$= \frac{\left(\frac{12\sqrt{91}.R}{91}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{13}.R}{2}\right)^2 - \frac{199R^2}{64}}{\frac{2.12.\sqrt{91}.R}{91}.\frac{\sqrt{13}.R}{2}} = \frac{5\sqrt{7}}{14}$$

HD' = HG + GD' = $\frac{9\sqrt{273}.R}{182} + \frac{23\sqrt{273}.R}{455} = \frac{\sqrt{273}.R}{10}$

cosCD'H = $\frac{CD'^2+HD'^2-HC^2}{2CD'.HD'} = \frac{\left(\frac{3\sqrt{3}.R}{5}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{273}.R}{10}\right)^2 - \left(\frac{\sqrt{3}.R}{2}\right)^2}{\frac{2.3\sqrt{3}.R}{5}.\frac{\sqrt{13}.R}{10}} = \frac{17}{2\sqrt{91}}$

Xét trong tam giác NGD' có GD' = $\frac{23\sqrt{273}.R}{455}$; cosNGD' = $\frac{5\sqrt{7}}{14}$; cosND'G = $\frac{17}{2\sqrt{91}}$

Kiểm tra thấy $\widehat{NGD'} \sim 19{,}1^0$; $\widehat{ND'G} \sim 27^0$ nên đây là các góc nhọn. Do đó, nếu kẻ NK' _|_ GD' tại K thì K' thuộc cạnh GD'

tan²NGD' = $\frac{1}{cos^2NGD'} - 1 = \left(\frac{14}{5\sqrt{7}}\right)^2 - 1 = \frac{3}{25}$ => tanNGD' = $\frac{\sqrt{3}}{5}$

Xét trong tam giác vuông NK'G: $\frac{NK'}{GK'}$ = tanNGD' = $\frac{\sqrt{3}}{5}$ => GK' = $\frac{5\sqrt{3}.NK'}{3}$

tan²ND'G = $\frac{1}{cos^2ND'G} - 1 = \left(\frac{2\sqrt{91}}{17}\right)^2 - 1 = \frac{75}{289}$ => tanND'G = $\frac{5\sqrt{3}}{17}$

Xét trong tam giác vuông NK'D: $\frac{NK'}{D'K'}$ = tanND'G = $\frac{5\sqrt{3}}{17}$ => D'K' = $\frac{17\sqrt{3}.NK'}{15}$

Ta có: GD' = GK' + K'D' => $\frac{23\sqrt{273}.R}{455} = \frac{5\sqrt{3}.NK'}{3} + \frac{17\sqrt{3}.NK'}{15}$

⇔ $\frac{23\sqrt{273}.R}{455} = \frac{14\sqrt{3}.NK'}{5}$ ⇔ NK' = $\frac{23.5\sqrt{273}.R}{455.14.\sqrt{3}} = \frac{23\sqrt{91}.R}{1274}$

Sin²ND'G = 1 – cos²ND'G = 1 – $\left(\frac{17}{2\sqrt{91}}\right)^2 = \frac{75}{364}$ => sinND'G = $\frac{5\sqrt{3}}{2\sqrt{91}}$

ND' = $\frac{NK'}{sinND'G} = \frac{23\sqrt{91}.R}{1274}.\frac{2\sqrt{91}}{5\sqrt{3}} = \frac{23\sqrt{3}.R}{105}$

CN = CD' – ND' = $\frac{3\sqrt{3}.R}{5} - \frac{23\sqrt{3}.R}{105} = \frac{8\sqrt{3}.R}{21}$

Gọi V' là trung điểm của cạnh BL, kẻ NP' _|_ AB tại P'; NP' cắt CV' tại S

Do tam giác CBL đều => CV' _|_ BL; $\widehat{BLC} = 60^0$; $\widehat{LCV'} = \frac{\widehat{BLC}}{2} = \frac{60^0}{2} = 30^0$

Ta có: CV' _|_ BL và AB _|_ BL => AB // CV'

Mà AB // CV' và NP' _|_ AB => NP' _|_ CV' tại S'

Xét tứ giác CHP'S' có CH _|_ BH; S'P' _|_ BH ; CS' _|_ P'S'

=> Tứ giác CHP'S' là hình chữ nhật => P'S' = CH = $\frac{R\sqrt{3}}{2}$; HP' = CS'

Tam giác CNS' vuông tại S' cho:

CS' = CN.cosLCV' = CN.cos(30^0) = $\frac{8\sqrt{3}.R}{21}.\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{4R}{7}$

HP'= NS' = CN.sinLCV' = CN.sin(30^0) = $\frac{8\sqrt{3}.R}{21}.\frac{1}{2} = \frac{4\sqrt{3}.R}{21}$

B'P' = HP' – HB' = $\frac{4R}{7} - \frac{81R}{182} = \frac{23R}{182}$

AP' = AH + HP' = $\frac{R}{2} + \frac{4R}{7} = \frac{15R}{14}$

NP' = NS' + S'P' = $\frac{4\sqrt{3}.R}{21} + \frac{\sqrt{3}.R}{2} = \frac{29\sqrt{3}.R}{42}$

Do AD _|_ AB ; GB' _|_ AB và NP' _|_ AB nên các tứ giác ADNP' ; ADGB' và NGB'P' là các hình thang cho nên:

$$S_{ADNP'} = \frac{(AD+NP').AP'}{2} = \left(\frac{2\sqrt{3}.R}{3} + \frac{29\sqrt{3}.R}{42}\right).\frac{15R}{14}.\frac{1}{2} = \frac{285\sqrt{3}.R^2}{392}$$

$$S_{ADGB'} = \frac{(AD+B'G).AB'}{2} = \left(\frac{2\sqrt{3}.R}{3} + \frac{36\sqrt{3}.R}{91}\right).\frac{86R}{91}.\frac{1}{2} = \frac{12470\sqrt{3}.R^2}{24843}$$

$$S_{NGB'P'} = \frac{(NP'+B'G).B'P'}{2} = \left(\frac{29\sqrt{3}.R}{42} + \frac{36\sqrt{3}.R}{91}\right).\frac{23R}{182}.\frac{1}{2} = \frac{13639\sqrt{3}.R^2}{198744}$$

$$S_{ADGB'} + S_{NGB'P'} = \frac{12470\sqrt{3}.R^2}{24843} + \frac{13639\sqrt{3}.R^2}{198744} = \frac{671\sqrt{3}.R^2}{1176}$$

Do $\frac{671\sqrt{3}.R^2}{1176} < \frac{285\sqrt{3}.R^2}{392}$ => $S_{ADGB'} + S_{NGB'P'} < S_{ADNP'}$

=> G nằm bên trong tứ giác ADNP'nên:

$$S_{\Delta DNG} = S_{ADNP'} - (S_{ADGB'} + S_{NGB'P'}) = \frac{285\sqrt{3}.R^2}{392} - \frac{671\sqrt{3}.R^2}{1176} = \frac{29\sqrt{3}.R^2}{42}$$

Vậy $\frac{S_{\Delta DNG}}{S_{\Delta BCG}} = \frac{29\sqrt{3}.R^2}{42} : \frac{3\sqrt{3}.R^2}{91} = \frac{299}{63}$ **(đpcm)**

Tóm lại: tỉ số diện tích $\frac{S_{\Delta DNG}}{S_{\Delta BCG}}$ là $\frac{299}{63}$ khi biểu thức: $\frac{2tan^2 AJK}{tanMNG+tanCGV} - \frac{\sqrt{3}.S_{\Delta HAC}}{S_{\Delta ADB}}$ đạt giá trị lớn nhất là $\frac{3\sqrt{3}}{16}$