

## CHUYÊN ĐỀ BIẾN ĐỔI ĐƠN GIẢN BIỂU THỨC CHỨA CĂN THỨC BẬC HAI

### A. KIẾN THỨC TRỌNG TÂM

1. Đưa thừa số ra ngoài dấu căn

+ Với  $A \geq 0$  và  $B \geq 0$  thì  $\sqrt{A^2 B} = A\sqrt{B}$

+ Với  $A < 0$  và  $B \geq 0$  thì  $\sqrt{A^2 B} = -A\sqrt{B}$

2. Đưa thừa số vào trong dấu căn

+ Với  $A \geq 0$  và  $B \geq 0$  thì  $A\sqrt{B} = \sqrt{A^2 B}$

+ Với  $A < 0$  và  $B \geq 0$  thì  $A\sqrt{B} = -\sqrt{A^2 B}$

3. Khử mẫu của biểu thức lấy căn

+ Với  $A.B \geq 0$  và  $B \neq 0$  thì  $\sqrt{\frac{A}{B}} = \frac{\sqrt{AB}}{|B|}$

4. Trục căn thức ở mẫu

+ Với  $B > 0$  thì  $\frac{A}{\sqrt{B}} = \frac{A\sqrt{B}}{B}$

+ Với  $A \geq 0$  và  $A \neq B^2$  thì  $\frac{C}{\sqrt{A \pm B}} = \frac{C(\sqrt{A \mp B})}{A - B^2}$

+ Với  $A \geq 0, B \geq 0$  và  $A \neq B$  thì  $\frac{C}{\sqrt{A \pm \sqrt{B}}} = \frac{C(\sqrt{A \mp \sqrt{B}})}{A - B}$

5. Rút gọn biểu thức có chứa căn bậc hai

**Bước 1.** Dùng các phép biến đổi đơn giản để đưa các căn thức bậc hai phức tạp thành căn thức bậc hai đơn giản.

**Bước 2.** Thực hiện phép tính theo thứ tự đã biết.

Để đơn giản hóa việc nhận dạng và xử lý bài toán, các em có thể tham khảo bảng dưới đây

| Dạng toán   | Ví dụ minh họa  |
|---|---|
| Với $A \geq 0$ và $B \geq 0$ thì $\sqrt{A^2 B} = A\sqrt{B}$       | $\sqrt{49.5} = \sqrt{7^2.5} = 7\sqrt{5}$  |
| Với $A < 0$ và $B \geq 0$ thì $\sqrt{A^2 B} = -A\sqrt{B}$         | $\sqrt{(-3)^2.13} = -(-3).\sqrt{13} = 3\sqrt{13}$   |
| Với $A \geq 0$ và $B \geq 0$ thì $A\sqrt{B} = \sqrt{A^2 B}$       | * $2\sqrt{3} = \sqrt{2^2.3} = \sqrt{12}$  |
| Với $A < 0$ và $B \geq 0$ thì $A\sqrt{B} = -\sqrt{A^2 B}$         | * $-3\sqrt{7} = -\sqrt{(-3)^2.7} = -\sqrt{63}$<br>* $x\sqrt{y} = -\sqrt{x^2.y} = -\sqrt{x^2 y}$ với $x < 0$   |
| Với $A.B \geq 0$ thì $\sqrt{\frac{A}{B}} = \frac{\sqrt{AB}}{ B }$ | * $\sqrt{\frac{5}{7}} = \sqrt{\frac{5.7}{7^2}} = \frac{\sqrt{35}}{ 7 } = \frac{\sqrt{35}}{7}; \sqrt{\frac{x}{y}} = \sqrt{\frac{xy}{y^2}} = \frac{\sqrt{xy}}{ y }$<br>với $xy > 0$ |
| Với $B > 0$ thì $\frac{A}{\sqrt{B}} = \frac{A\sqrt{B}}{B}$        | * $\frac{3}{\sqrt{5}} = \frac{3\sqrt{5}}{5}$  |

|  |   |
|--|---|
| <p>Với <math>A \geq 0</math> và <math>A \neq B^2</math> thì <math>\frac{C}{\sqrt{A \pm B}} = \frac{C(\sqrt{A \mp B})}{A - B^2}</math></p>          | $* \frac{3}{\sqrt{5+2}} = \frac{3(\sqrt{5}-2)}{(\sqrt{5}+2)(\sqrt{5}-2)}$ $= \frac{3(\sqrt{5}-2)}{5-2^2} = \frac{3(\sqrt{5}-2)}{1} = 3(\sqrt{5}-2)$ $* \frac{5}{\sqrt{7}-2} = \frac{5(\sqrt{7}+2)}{(\sqrt{7}-2)(\sqrt{7}+2)}$ $= \frac{5(\sqrt{7}+2)}{7-2^2} = \frac{5(\sqrt{7}+2)}{3}$   |
| <p>Với <math>A \geq 0, B \geq 0</math> và <math>A \neq B</math> thì</p> $\frac{C}{\sqrt{A \pm \sqrt{B}}} = \frac{C(\sqrt{A \mp \sqrt{B}})}{A - B}$ | $* \frac{5}{\sqrt{7}-\sqrt{3}} = \frac{5(\sqrt{7}+\sqrt{3})}{(\sqrt{7}-\sqrt{3})(\sqrt{7}+\sqrt{3})}$ $= \frac{5(\sqrt{7}+\sqrt{3})}{7-3} = \frac{5(\sqrt{7}+\sqrt{3})}{4}$ $* \frac{2}{\sqrt{7}+\sqrt{5}} = \frac{2(\sqrt{7}-\sqrt{5})}{(\sqrt{7}+\sqrt{5})(\sqrt{7}-\sqrt{5})}$ $= \frac{2(\sqrt{7}-\sqrt{5})}{7-5} = \frac{2(\sqrt{7}-\sqrt{5})}{2} = \sqrt{7}-\sqrt{5}$ |

## B. CÁC DẠNG TOÁN MINH HỌA

### I. DẠNG BÀI MINH HỌA

#### Dạng 1. Biến đổi đơn giản biểu thức chứa căn thức bậc hai các dạng cơ bản.

Ví dụ 1. Sắp xếp các số sau theo thứ tự tăng dần:

a)  $4\sqrt{3}$ ;  $3\sqrt{5}$ ;  $5\sqrt{2}$ ;  $2\sqrt{5}$ ;                      b)  $\sqrt{15}$ ;  $2\sqrt{6}$ ;  $6\sqrt{\frac{1}{3}}$ ;  $3\sqrt{2}$ .

#### Hướng dẫn giải

a) Đưa các thừa số vào trong dấu căn, ta được:

$$4\sqrt{3} = \sqrt{48}; \quad 3\sqrt{5} = \sqrt{45};$$

$$5\sqrt{2} = \sqrt{50}; \quad 2\sqrt{5} = \sqrt{20}$$

$$\text{Mà } \sqrt{20} < \sqrt{45} < \sqrt{48} < \sqrt{50}.$$

Suy ra thứ tự tăng dần là  $2\sqrt{5}$ ;  $3\sqrt{5}$ ;  $4\sqrt{3}$ ;  $5\sqrt{2}$ .

b) Đưa các thừa số vào trong dấu căn, ta được:

$$\sqrt{15}; \quad 2\sqrt{6} = \sqrt{24};$$

$$6\sqrt{\frac{1}{3}} = \sqrt{12}; \quad 3\sqrt{2} = \sqrt{18}.$$

$$\text{Mà } \sqrt{12} < \sqrt{15} < \sqrt{18} < \sqrt{24}.$$

Suy ra thứ tự tăng dần là  $6\sqrt{\frac{1}{3}}$ ;  $\sqrt{15}$ ;  $3\sqrt{2}$ ;  $2\sqrt{6}$

#### Ví dụ 2.

a) Khử căn thức ở mẫu số:  $A = \frac{59}{\sqrt{3} + \sqrt{5} + \sqrt{7}}$

b) Rút gọn các biểu thức sau: b1)  $\frac{3 + \sqrt{3}}{1 + \sqrt{3}}$       b2)  $\frac{\sqrt{14} - \sqrt{7}}{2 - \sqrt{2}}$

#### Hướng dẫn giải

a)

$$A = \frac{59(\sqrt{3} + \sqrt{5} - \sqrt{7})}{(\sqrt{3} + \sqrt{5})^2 - 7} = \frac{59(\sqrt{3} + \sqrt{5} - \sqrt{7})}{2\sqrt{15} + 1} = \frac{59(\sqrt{3} + \sqrt{5} - \sqrt{7})(2\sqrt{15} - 1)}{60 - 1}$$

$$A = (\sqrt{3} + \sqrt{5} - \sqrt{7})(2\sqrt{15} - 1).$$

b)

b1) Cách 1: Phân tích tử thành nhân tử rồi rút gọn.

$$\frac{3 + \sqrt{3}}{1 + \sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}(\sqrt{3} + 1)}{1 + \sqrt{3}} = \sqrt{3}$$

Cách 2: Trục căn thức ở mẫu.

$$\frac{3 + \sqrt{3}}{1 + \sqrt{3}} = \frac{(3 + \sqrt{3})(1 - \sqrt{3})}{(1 + \sqrt{3})(1 - \sqrt{3})} = \frac{3 - 3\sqrt{3} + \sqrt{3} - 3}{1 - 3} = \frac{-2\sqrt{3}}{-2} = \sqrt{3}$$

b2) Cách 1: Phân tích tử thành nhân tử rồi rút gọn.

$$\frac{\sqrt{14}-\sqrt{7}}{2-\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{7}(\sqrt{2}-1)}{\sqrt{2}(\sqrt{2}-1)} = \frac{\sqrt{7}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{7} \cdot \sqrt{2}}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{2}} = \frac{\sqrt{14}}{2}$$

Cách 2: Trục căn thức ở mẫu.

$$\begin{aligned} \frac{\sqrt{14}-\sqrt{7}}{2-\sqrt{2}} &= \frac{(\sqrt{14}-\sqrt{7})(2+\sqrt{2})}{(2-\sqrt{2})(2+\sqrt{2})} = \frac{2\sqrt{14}-2\sqrt{7}+\sqrt{28}-\sqrt{14}}{2^2-(\sqrt{2})^2} \\ &= \frac{2\sqrt{14}-2\sqrt{7}+2\sqrt{7}-\sqrt{14}}{4-2} = \frac{\sqrt{14}}{2} \end{aligned}$$

**Ví dụ 3.** Trục căn thức ở mẫu:

a)  $\frac{1}{2+\sqrt{5}+2\sqrt{2}+\sqrt{10}}$ ;      b)  $\frac{15}{\sqrt{10}-\sqrt{20}+\sqrt{40}-\sqrt{5}+\sqrt{80}}$ ;      c)  $\frac{2\sqrt{10}}{\sqrt{2}+\sqrt{5}+\sqrt{7}}$ .

**Hướng dẫn giải**

a) Ta có: 
$$\begin{aligned} \frac{1}{(2+\sqrt{5})+\sqrt{2}(2+\sqrt{5})} &= \frac{1}{(2+\sqrt{5})(1+\sqrt{2})} \\ &= \frac{(2-\sqrt{5})(1-\sqrt{2})}{(4-5)(1-2)} = (2-\sqrt{5})(1-\sqrt{2}). \end{aligned}$$

b) 
$$\begin{aligned} \frac{15}{\sqrt{10}-2\sqrt{5}+2\sqrt{10}+\sqrt{5}+4\sqrt{5}} &= \frac{15}{3\sqrt{10}+3\sqrt{5}} = \frac{5}{\sqrt{10}+\sqrt{5}} \\ &= \frac{5(\sqrt{10}-\sqrt{5})}{10-5} = \sqrt{10}-\sqrt{5}. \end{aligned}$$

c) 
$$\frac{2\sqrt{10}(\sqrt{2}+\sqrt{5}-\sqrt{7})}{(\sqrt{2}+\sqrt{5})^2-7} = \frac{2\sqrt{10}(\sqrt{2}+\sqrt{5}-\sqrt{7})}{7+2\sqrt{10}-7} = \sqrt{2}+\sqrt{5}-\sqrt{7}.$$

**Ví dụ 4.** Rút gọn biểu thức:

a)  $A = \frac{(\sqrt{3}-\sqrt{2})(\sqrt{3}+\sqrt{2})}{\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}+\sqrt{2}} + \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}}$ ;      b)  $B = \frac{\frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2}}{\frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2} - \frac{2}{\sqrt{6}} + \frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2\sqrt{3}}}$ .

**Hướng dẫn giải**

a) Ta có: 
$$A = \frac{3-2}{\sqrt{3}(\sqrt{3}-\sqrt{2})+\sqrt{2}(\sqrt{3}+\sqrt{2})} = \frac{1}{3-\sqrt{6}+\sqrt{6}+2} = \frac{1}{5}.$$

b) Ta có: 
$$\begin{aligned} B &= \frac{\sqrt{4+2\sqrt{3}}}{2\sqrt{2}} : \left( \frac{\sqrt{4+2\sqrt{3}}}{2\sqrt{2}} - \frac{2}{\sqrt{6}} + \frac{\sqrt{4+2\sqrt{3}}}{2\sqrt{6}} \right) \\ B &= \frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}} : \left( \frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}} - \frac{2}{\sqrt{6}} + \frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{6}} \right) \end{aligned}$$

$$B = \frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}} : \left( \frac{(\sqrt{3}+1)\sqrt{3}-4+\sqrt{3}+1}{2\sqrt{6}} \right)$$

$$B = \frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}} : \frac{3+\sqrt{3}-4+\sqrt{3}+1}{2\sqrt{6}}$$

$$B = \frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}} : \frac{2\sqrt{3}}{2\sqrt{6}} = \frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}} \cdot \frac{2\sqrt{6}}{2\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}+1}{2}$$

**Ví dụ 5.** Rút gọn các biểu thức sau bằng cách đưa thừa số ra ngoài dấu căn:

a)  $\sqrt{245.35}$                       b)  $\sqrt{63a^2}$  với  $a < 0$                       c)  $\frac{2xy^2}{3ab} \sqrt{\frac{9a^3b^4}{8xy^3}}$  với  $a, b, x, y > 0$

**Hướng dẫn giải**

a) Biểu thức  $\sqrt{245.35} = \sqrt{49.5.5.7}$   
 $= \sqrt{49} \cdot \sqrt{25} \cdot \sqrt{7} = 7.5 \cdot \sqrt{7} = 35\sqrt{7}$

b) Biểu thức  $\sqrt{63a^2} = \sqrt{9.7.a^2} = \sqrt{9} \cdot \sqrt{7} \cdot \sqrt{a^2} = 3\sqrt{7} \cdot |a|$

Vì  $a < 0$  nên  $|a| = -a$ . Do đó:  $\sqrt{63a^2} = -3\sqrt{7}a$ .

c) Biểu thức  $\frac{2xy^2}{3ab} \sqrt{\frac{9a^3b^4}{8xy^3}} = \frac{2xy^2}{3ab} \sqrt{\frac{9a^2 \cdot a \cdot b^4}{4 \cdot 2 \cdot x \cdot y^2 \cdot y}}$

$$= \frac{2xy^2}{3ab} \cdot \frac{\sqrt{9} \cdot \sqrt{a^2} \cdot \sqrt{a} \cdot \sqrt{b^4}}{\sqrt{4} \cdot \sqrt{2xy} \cdot \sqrt{y^2}}$$

$$= \frac{2xy^2}{3ab} \cdot \frac{3 \cdot |a| \cdot b^2 \cdot \sqrt{a}}{2 \cdot |y| \cdot \sqrt{2xy}}$$

$$= \frac{2xy^2 \cdot 3 \cdot |a| \cdot b^2}{3ab \cdot 2 \cdot |y|} \cdot \sqrt{\frac{a}{2xy}}$$

Vì  $a, b, x, y > 0$  nên  $|a| = a$ ;  $|y| = y$ , ta có:  $\frac{2xy^2}{3ab} \sqrt{\frac{9a^3b^4}{8xy^3}}$

$$= \frac{2xy^2 \cdot 3 \cdot ab^2}{3ab \cdot 2 \cdot y} \cdot \sqrt{\frac{a}{2xy}} = bxy \cdot \sqrt{\frac{a}{2xy}}$$

**Ví dụ 6.** Thực hiện phép tính.

a)  $A = \sqrt{20} - 2\sqrt{45} - 3\sqrt{80} + \sqrt{125}$ ;

b)  $B = \left( \frac{\sqrt{5}+1}{1+\sqrt{5}+\sqrt{3}} + \frac{\sqrt{5}-1}{1+\sqrt{3}-\sqrt{5}} \right) \cdot \left( \sqrt{3} - 4\sqrt{\frac{1}{3}} + 2 \right) \cdot \sqrt{0,2}$ .

**Hướng dẫn giải**

a) Ta có:  $A = \sqrt{20} - 2\sqrt{45} - 3\sqrt{80} + \sqrt{125}$

$$A = 2\sqrt{5} - 6\sqrt{5} - 12\sqrt{5} + 5\sqrt{5} = -11\sqrt{5}.$$

b) Ta có:  $B = \frac{(\sqrt{5}+1)(1+\sqrt{3}-\sqrt{5}) + (\sqrt{5}-1)(1+\sqrt{3}+\sqrt{5})}{(1+\sqrt{3})^2 - 5} \cdot \left( \sqrt{3} - \frac{4\sqrt{3}}{3} + 2 \right) \cdot \frac{\sqrt{5}}{5}$

$$B = \frac{\sqrt{5} + \sqrt{15} - 5 + 1 + \sqrt{3} - \sqrt{5} + \sqrt{5} + \sqrt{15} + 5 - 1 - \sqrt{3} - \sqrt{5}}{2\sqrt{3} - 1} \cdot \left(2 - \frac{\sqrt{3}}{3}\right) \cdot \frac{\sqrt{5}}{5}$$

$$B = \frac{2\sqrt{15}}{2\sqrt{3} - 1} \cdot \frac{6 - \sqrt{3}}{3} \cdot \frac{\sqrt{5}}{5}$$

$$B = \frac{10\sqrt{3} \cdot (6 - \sqrt{3})}{15(2\sqrt{3} - 1)} = \frac{2(6\sqrt{3} - 3)}{3(2\sqrt{3} - 1)} = \frac{2 \cdot 3 \cdot (2\sqrt{3} - 1)}{3 \cdot (2\sqrt{3} - 1)} = 2$$

**Ví dụ 7.** Rút gọn biểu thức:  $R = \frac{3 + \sqrt{5}}{\sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{5}} + \frac{3 - \sqrt{5}}{\sqrt{2} - \sqrt{3} - \sqrt{5}}$

### Hướng dẫn giải

**Cách 1.** Mỗi phân thức nhân cả tử và mẫu với  $\sqrt{2}$ , ta được:

$$R = \frac{3\sqrt{2} + \sqrt{10}}{2 + \sqrt{6} + 2\sqrt{5}} + \frac{3\sqrt{2} - \sqrt{10}}{2 - \sqrt{6} - 2\sqrt{5}}$$

$$R = \frac{3\sqrt{2} + \sqrt{10}}{2 + \sqrt{5} + 1} + \frac{3\sqrt{2} - \sqrt{10}}{2 - (\sqrt{5} - 1)}$$

$$R = \frac{3\sqrt{2} + \sqrt{10}}{3 + \sqrt{5}} + \frac{3\sqrt{2} - \sqrt{10}}{3 - \sqrt{5}}$$

$$R = \frac{(3\sqrt{2} + \sqrt{10})(3 - \sqrt{5}) + (3\sqrt{2} - \sqrt{10})(3 + \sqrt{5})}{(3 + \sqrt{5})(3 - \sqrt{5})}$$

$$R = \frac{9\sqrt{2} - 3\sqrt{10} + 3\sqrt{10} - 5\sqrt{2} + 9\sqrt{2} + 3\sqrt{10} - 3\sqrt{10} - 5\sqrt{2}}{9 - 5}$$

$$R = \frac{8\sqrt{2}}{4} = 2\sqrt{2}.$$

**Cách 2.** Nhân hai vế với  $\frac{1}{\sqrt{2}}$ , ta được:

$$R \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{3 + \sqrt{5}}{2 + \sqrt{6} + 2\sqrt{5}} + \frac{3 - \sqrt{5}}{2 - \sqrt{6} - 2\sqrt{5}}$$

$$R \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{3 + \sqrt{5}}{2 + \sqrt{5} + 1} + \frac{3 - \sqrt{5}}{2 - \sqrt{5} + 1}$$

$$R \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{3 + \sqrt{5}}{3 + \sqrt{5}} + \frac{3 - \sqrt{5}}{3 - \sqrt{5}} = 2$$

Suy ra:  $R = 2\sqrt{2}$ .

### Dạng 2. Nâng cao phát triển tư duy

**Ví dụ 1.** Rút gọn biểu thức:  $P = \frac{3 + \sqrt{5}}{\sqrt{10} + \sqrt{3} + \sqrt{5}} - \frac{3 - \sqrt{5}}{\sqrt{10} + \sqrt{3} - \sqrt{5}}$

### Hướng dẫn giải

$$\text{Ta có: } P = \frac{3\sqrt{2} + \sqrt{10}}{2\sqrt{5} + \sqrt{6} + 2\sqrt{5}} - \frac{3\sqrt{2} - \sqrt{10}}{2\sqrt{5} + \sqrt{6} - 2\sqrt{5}}$$

$$P = \frac{3\sqrt{2} + \sqrt{10}}{2\sqrt{5} + \sqrt{5} + 1} - \frac{3\sqrt{2} - \sqrt{10}}{2\sqrt{5} + \sqrt{5} - 1}$$

$$P = \frac{3\sqrt{2} + \sqrt{10}}{3\sqrt{5} + 1} - \frac{3\sqrt{2} - \sqrt{10}}{3\sqrt{5} - 1}$$

$$P = \frac{(3\sqrt{2} + \sqrt{10})(3\sqrt{5} - 1) - (3\sqrt{2} - \sqrt{10})(3\sqrt{5} + 1)}{(3\sqrt{5} - 1)(3\sqrt{5} + 1)}$$

$$P = \frac{9\sqrt{10} - 3\sqrt{2} + 15\sqrt{2} - \sqrt{10} - 9\sqrt{10} - 3\sqrt{2} + 15\sqrt{2} + \sqrt{10}}{45 - 1}$$

$$P = \frac{24\sqrt{2}}{44} = \frac{6\sqrt{2}}{11}.$$

**Ví dụ 2.** Thực hiện phép tính:

$$\text{a) } A = \frac{1}{\sqrt{8} + \sqrt{7}} + \sqrt{175} - 2\sqrt{2};$$

$$\text{b) } B = \sqrt{\frac{3 - 2\sqrt{2}}{17 - 12\sqrt{2}}} - \sqrt{\frac{3 + 2\sqrt{2}}{17 + 12\sqrt{2}}}.$$

**Hướng dẫn giải**

$$\text{a) } A = \frac{\sqrt{8} - \sqrt{7}}{8 - 7} + 5\sqrt{7} - 2\sqrt{2} = \sqrt{8} - \sqrt{7} + 5\sqrt{7} - 2\sqrt{2}.$$

$$A = 4\sqrt{7}$$

$$\text{b) } B = \sqrt{\frac{3 - 2\sqrt{2}}{9 - 12\sqrt{2} + 8}} - \sqrt{\frac{3 + 2\sqrt{2}}{9 + 12\sqrt{2} + 8}} = \sqrt{\frac{3 - 2\sqrt{2}}{(3 - 2\sqrt{2})^2}} - \sqrt{\frac{3 + 2\sqrt{2}}{(3 + 2\sqrt{2})^2}}$$

$$B = \sqrt{\frac{1}{3 - 2\sqrt{2}}} - \sqrt{\frac{1}{3 + 2\sqrt{2}}} = \sqrt{\frac{1}{(\sqrt{2} - 1)^2}} - \sqrt{\frac{1}{(\sqrt{2} + 1)^2}}$$

$$B = \frac{1}{\sqrt{2} - 1} - \frac{1}{\sqrt{2} + 1}$$

$$\Rightarrow B = \frac{\sqrt{2} + 1 - (\sqrt{2} - 1)}{2 - 1} = 2.$$

$$\text{Ví dụ 3. Rút gọn biểu thức: } B = \frac{\sqrt{2} + \sqrt{3} - 1}{2 + \sqrt{6}} + \frac{\sqrt{2} - \sqrt{3}}{2\sqrt{6}} \left( \frac{\sqrt{3}}{2 - \sqrt{6}} + \frac{\sqrt{3}}{2 + \sqrt{6}} \right) - \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

**Hướng dẫn giải**

Ta có:

$$B = \frac{(\sqrt{2} + \sqrt{3} - 1)(2 - \sqrt{6})}{4 - 6} + \frac{(\sqrt{2} - \sqrt{3}) \cdot \sqrt{6}}{2 \cdot 6} \cdot \frac{\sqrt{3}(2 + \sqrt{6}) + \sqrt{3}(2 - \sqrt{6})}{4 - 6} - \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$B = \frac{2\sqrt{2} - 2\sqrt{3} + 2\sqrt{3} - 3\sqrt{2} - 2 + \sqrt{6}}{-2} + \frac{(\sqrt{2} - \sqrt{3}) \cdot \sqrt{6}}{2 \cdot 6} \cdot \frac{\sqrt{3} \cdot 4}{-2} - \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$B = \frac{-\sqrt{2}-2+\sqrt{6}}{-2} + \frac{(\sqrt{2}-\sqrt{3}) \cdot 3\sqrt{2}}{-6} - \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$B = \frac{\sqrt{2}+2-\sqrt{6}}{2} + \frac{(\sqrt{3}-\sqrt{2}) \cdot \sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$B = \frac{\sqrt{2}+2-\sqrt{6}+\sqrt{6}-2-\sqrt{2}}{2}$$

$$B = 0.$$

**Ví dụ 4.** Rút gọn biểu thức:

$$a) A = \frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{2+\sqrt{3}}} + \frac{1}{\sqrt{2}-\sqrt{2-\sqrt{3}}} \qquad b) T = \sqrt{\frac{2+\sqrt{3}}{2-\sqrt{3}}} + \sqrt{\frac{2-\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}}}.$$

**Hướng dẫn giải**

$$a) \text{ Ta có: } A = \frac{\sqrt{2}-\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2-(2+\sqrt{3})} + \frac{\sqrt{2}+\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2-(2-\sqrt{3})}$$

$$A = \frac{\sqrt{2}-\sqrt{2+\sqrt{3}}}{-\sqrt{3}} + \frac{\sqrt{2}+\sqrt{2-\sqrt{3}}}{\sqrt{3}}$$

$$A = \frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}+\sqrt{2-\sqrt{3}}}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{4+2\sqrt{3}}+\sqrt{4-2\sqrt{3}}}{\sqrt{6}}$$

$$A = \frac{\sqrt{(\sqrt{3}+1)^2} + \sqrt{(\sqrt{3}-1)^2}}{\sqrt{6}} = \frac{\sqrt{3}+1+\sqrt{3}-1}{\sqrt{6}} = \frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{6}} = \sqrt{2}.$$

$$b) \text{ Ta có: } T = \sqrt{\frac{(2+\sqrt{3})^2}{4-3}} + \sqrt{\frac{(2-\sqrt{3})^2}{4-3}}$$

$$S = 2 + \sqrt{3} + 2 - \sqrt{3}$$

$$S = 4.$$

$$\text{Ví dụ 5. Cho } A = \frac{3+\sqrt{5}}{4+\sqrt{2(3+\sqrt{5})}} \text{ và } B = \frac{3-\sqrt{5}}{4-\sqrt{2(3-\sqrt{5})}}. \text{ Tính } A^3 - B^3.$$

**Hướng dẫn giải**

$$\text{Ta có: } A = \frac{3+\sqrt{5}}{4+\sqrt{6+2\sqrt{5}}} = \frac{3+\sqrt{5}}{4+\sqrt{5}+1} = \frac{3+\sqrt{5}}{5+\sqrt{5}} = \frac{(3+\sqrt{5})(5-\sqrt{5})}{25-5}$$

$$A = \frac{15-3\sqrt{5}+5\sqrt{5}-5}{20} = \frac{10+2\sqrt{5}}{20} = \frac{5+\sqrt{5}}{10}$$

$$\text{Ta có: } B = \frac{3-\sqrt{5}}{4-\sqrt{2(3-\sqrt{5})}} = \frac{3-\sqrt{5}}{4-(\sqrt{5}-1)} = \frac{3-\sqrt{5}}{5-\sqrt{5}} = \frac{(3-\sqrt{5})(5+\sqrt{5})}{25-5}$$

$$B = \frac{15+3\sqrt{5}-5\sqrt{5}-5}{20} = \frac{10-2\sqrt{5}}{20} = \frac{5-\sqrt{5}}{10}.$$

Suy ra:  $A - B = \frac{5 + \sqrt{5}}{10} - \frac{5 - \sqrt{5}}{10} = \frac{\sqrt{5}}{5}$ ;  $A.B = \frac{(5 + \sqrt{5})(5 - \sqrt{5})}{10.10} = \frac{1}{5}$ .

Ta có:  $A^3 - B^3 = (A - B)^3 + 3AB(A - B) = \left(\frac{\sqrt{5}}{5}\right)^3 + 3 \cdot \frac{1}{5} \cdot \frac{\sqrt{5}}{5} = \frac{4\sqrt{5}}{25}$ .

**Ví dụ 6.** Xác định  $a, b$  biết:  $\frac{13}{3\sqrt{7} + \sqrt{11}} + \frac{17}{4\sqrt{7} + 2\sqrt{11}} = a\sqrt{7} + b\sqrt{11}$ .

**Hướng dẫn giải**

Xét về trái:  $\frac{13(3\sqrt{7} - \sqrt{11})}{9 \cdot 7 - 11} + \frac{17(4\sqrt{7} - 2\sqrt{11})}{16 \cdot 7 - 4 \cdot 11}$   
 $= \frac{13(3\sqrt{7} - \sqrt{11})}{52} + \frac{17(4\sqrt{7} - 2\sqrt{11})}{4 \cdot 17}$   
 $= \frac{3\sqrt{7} - \sqrt{11}}{4} + \frac{4\sqrt{7} - 2\sqrt{11}}{4} = \frac{7}{4} \cdot \sqrt{7} - \frac{3}{4} \cdot \sqrt{11}$ .

Đồng nhất hai vế ta được:  $a = \frac{7}{4}$ ;  $b = -\frac{3}{4}$ .

**Ví dụ 7.** Cho  $\frac{\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x}}{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}} = \sqrt{2}$ . Với  $|x| < 1$ ;  $x \neq 0$ . Chứng minh rằng  $\frac{x-1}{x+1} = 12\sqrt{2} - 17$ .

**Hướng dẫn giải**

Ta có:  $\frac{(\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x})^2}{1+x - (1-x)} = \sqrt{2} \Leftrightarrow \frac{1+x + 2\sqrt{1-x^2} + 1-x}{2x} = \sqrt{2}$

ĐKXĐ:  $x \neq 0$

$\Leftrightarrow \frac{2 + 2\sqrt{1-x^2}}{2x} = \sqrt{2} \Leftrightarrow 1 + \sqrt{1-x^2} = \sqrt{2} \cdot x$

$\Leftrightarrow \sqrt{1-x^2} = \sqrt{2} \cdot x - 1$ .

Bình phương hai vế, ta được:  $1 - x^2 = 2x^2 - 2\sqrt{2} \cdot x + 1 \Leftrightarrow 3x^2 - 2\sqrt{2}x = 0$ .

Vì  $x \neq 0$  nên  $3x - 2\sqrt{2} = 0 \Rightarrow x = \frac{2\sqrt{2}}{3}$ .

Xét  $\frac{x-1}{x+1} = \frac{\frac{2\sqrt{2}}{3} - 1}{\frac{2\sqrt{2}}{3} + 1} = \frac{2\sqrt{2} - 3}{2\sqrt{2} + 3} = \frac{(2\sqrt{2} - 3)^2}{8 - 9} = \frac{8 - 12\sqrt{2} + 9}{-1} = 12\sqrt{2} - 17$ .

Điều phải chứng minh.

**Ví dụ 8.** Tính giá trị biểu thức  $M = x^5 - 6x^3 + x$  tại  $x = \frac{3 + \sqrt{2}}{2\sqrt{2} - 1}$ .

**Hướng dẫn giải**

Ta có:  $x = \frac{(3 + \sqrt{2})(2\sqrt{2} + 1)}{8 - 1} = \frac{7\sqrt{2} + 7}{7} = \sqrt{2} + 1$

$\Rightarrow x = \sqrt{2} + 1 \Rightarrow x^2 = 3 + 2\sqrt{2}$

Ta có:  $x^3 = x.x^2 = (\sqrt{2} + 1)(3 + 2\sqrt{2}) = 5\sqrt{2} + 7$

$x^5 = x^2.x^3 = (3 + 2\sqrt{2})(5\sqrt{2} + 7) = 29\sqrt{2} + 41$

Thay vào biểu thức  $M$  ta có:

$M = 29\sqrt{2} + 41 - 6(5\sqrt{2} + 7) + \sqrt{2} + 1 \Rightarrow M = 0.$

**Ví dụ 9.** Cho biểu thức:  $M = \frac{2}{3} \cdot \left[ \frac{1}{1 + \left(\frac{2\sqrt{x} + 1}{\sqrt{3}}\right)^2} + \frac{1}{1 + \left(\frac{2\sqrt{x} - 1}{\sqrt{3}}\right)^2} \right] \cdot \frac{2020}{x + 1}$

a) Rút gọn  $M$ ;

b) Tìm giá trị lớn nhất của  $M$ .

**Hướng dẫn giải**

a) Ta có:  $M = \frac{2}{3} \cdot \left[ \frac{3}{3 + (2\sqrt{x} + 1)^2} + \frac{3}{3 + (2\sqrt{x} - 1)^2} \right] \cdot \frac{2020}{x + 1}$

$M = \frac{2}{3} \cdot \left[ \frac{3}{3 + 4x + 4\sqrt{x} + 1} + \frac{3}{3 + 4x - 4\sqrt{x} + 1} \right] \cdot \frac{2020}{x + 1}$

$M = \frac{2}{3} \cdot \left[ \frac{3}{4x + 4\sqrt{x} + 4} + \frac{3}{4x - 4\sqrt{x} + 4} \right] \cdot \frac{2020}{x + 1}$

$M = \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{4} \cdot \left( \frac{1}{x + \sqrt{x} + 1} + \frac{1}{x - \sqrt{x} + 1} \right) \cdot \frac{2020}{x + 1}$

$M = \frac{1}{2} \cdot \frac{x - \sqrt{x} + 1 + x + \sqrt{x} + 1}{(x + 1)^2 - x} \cdot \frac{2020}{x + 1}$

$M = \frac{1}{2} \cdot \frac{2x + 2}{x^2 + x + 1} \cdot \frac{2020}{x + 1}$

$M = \frac{2020}{x^2 + x + 1}$ . TXĐ:  $x \geq 0$ .

b) Ta có:  $x^2 + x + 1 \geq 1$ . Vì  $x \geq 0$

nên  $M = \frac{2020}{x^2 + x + 1} \leq \frac{2020}{1} = 2020$ .

Vậy giá trị lớn nhất của  $M$  là 2020 khi  $x = 0$ .

**Ví dụ 10.** Cho biểu thức  $A = \left( \frac{2}{\sqrt{x} - 2} + \frac{3}{2\sqrt{x} + 1} - \frac{5\sqrt{x} - 7}{2x - 3\sqrt{x} - 2} \right) : \frac{2\sqrt{x} + 3}{3x - 6\sqrt{x}}$  ( $x > 0; x \neq 4$ )

a) Rút gọn  $A$ .

b) Tìm  $x$  để  $A = 2\sqrt{x} - 1$ .

**Hướng dẫn giải**

a) Ta có:  $A = \frac{2(2\sqrt{x} + 1) + 3(\sqrt{x} - 2) - 5\sqrt{x} + 7}{(\sqrt{x} - 2)(2\sqrt{x} + 1)} \cdot \frac{3x - 6\sqrt{x}}{2\sqrt{x} + 3}$

$$A = \frac{4\sqrt{x} + 2 + 3\sqrt{x} - 6 - 5\sqrt{x} + 7}{(\sqrt{x} - 2)(2\sqrt{x} + 1)} \cdot \frac{3\sqrt{x}(\sqrt{x} - 2)}{2\sqrt{x} + 3}$$

$$A = \frac{2\sqrt{x} + 3}{(\sqrt{x} - 2)(2\sqrt{x} + 1)} \cdot \frac{3\sqrt{x}(\sqrt{x} - 2)}{2\sqrt{x} + 3} = \frac{3\sqrt{x}}{2\sqrt{x} + 1}$$

$$\text{b) } A = 2\sqrt{x} - 1 \Rightarrow \frac{3\sqrt{x}}{2\sqrt{x} + 1} = 2\sqrt{x} - 1 \Leftrightarrow (2\sqrt{x} + 1)(2\sqrt{x} - 1) = 3\sqrt{x}$$

$$\Leftrightarrow 4x - 3\sqrt{x} - 1 = 0 \Leftrightarrow (\sqrt{x} - 1)(4\sqrt{x} + 1) = 0$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{x} = 1 \Leftrightarrow x = 1, \text{ thuộc tập xác định.}$$

Vậy với  $x = 1$  thì  $A = 2\sqrt{x} - 1$ .

## II. TRẮC NGHIỆM RÈN LUYỆN PHẦN XẠ

**Câu 1.** Cho các biểu thức  $A, B$  mà  $A.B \geq 0; B \neq 0$ , khẳng định nào sau đây là đúng?

A.  $\sqrt{\frac{A}{B}} = \frac{\sqrt{AB}}{B}$ .    B.  $\sqrt{\frac{A}{B}} = -\frac{\sqrt{AB}}{B}$ .    C.  $\sqrt{\frac{A}{B}} = \frac{\sqrt{A}}{B}$ .    D.  $\sqrt{\frac{A}{B}} = \frac{AB}{\sqrt{B}}$ .

**Câu 2.** Cho biểu thức với  $A < 0$  và  $B \geq 0$ , khẳng định nào sau đây là đúng?

A.  $\sqrt{A^2B} = A\sqrt{B}$ .    B.  $\sqrt{A^2B} = -A\sqrt{B}$ .    C.  $\sqrt{A^2B} = -B\sqrt{A}$ .    D.  $\sqrt{A^2B} = B\sqrt{A}$ .

**Câu 3.** Đưa thừa số  $\sqrt{81(2-y)^4}$  ra ngoài dấu căn ta được?

A.  $9(2-y)$ .    B.  $81(2-y)^2$ .    C.  $9(2-y)^2$ .    D.  $-9(2-y)^2$ .

**Câu 4.** Đưa thừa số  $\sqrt{144(3+2a)^4}$  ra ngoài dấu căn ta được?

A.  $12(3+2a)^4$ .    B.  $144(3+2a)^2$ .    C.  $-12(3+2a)^2$ .    D.  $12(3+2a)^2$ .

**Câu 5.** Đưa thừa số  $5y\sqrt{y}$  ( $y \geq 0$ ) vào trong dấu căn ta được.

A.  $\sqrt{5y^2}$ .    B.  $\sqrt{25y^3}$ .    C.  $\sqrt{5y^3}$ .    D.  $\sqrt{25y\sqrt{y}}$ .

**Câu 6.** Đưa thừa số  $x\sqrt{\frac{-35}{x}}$  ( $x < 0$ ) vào trong dấu căn ta được.

A.  $\sqrt{-35x}$ .    B.  $-\sqrt{-35x}$ .    C.  $\sqrt{35}$ .    D.  $\sqrt{35x^2}$ .

**Câu 7.** Đưa thừa số  $5x\sqrt{\frac{-12}{x^3}}$  ( $x < 0$ ) vào trong dấu căn ta được:

A.  $\sqrt{\frac{300}{x}}$ .    B.  $\sqrt{\frac{-300}{x}}$ .    C.  $-\sqrt{\frac{-300}{x}}$ .    D.  $-\sqrt{\frac{-60}{x}}$ .

**Câu 8.** So sánh hai số  $5\sqrt{3}$  và  $4\sqrt{5}$

A.  $5\sqrt{3} > 4\sqrt{5}$ .    B.  $5\sqrt{3} = 4\sqrt{5}$ .    C.  $5\sqrt{3} \geq 4\sqrt{5}$ .    D.  $5\sqrt{3} < 4\sqrt{5}$ .

**Câu 9.** So sánh hai số  $9\sqrt{7}$  và  $8\sqrt{8}$

A.  $8\sqrt{8} < 9\sqrt{7}$ .    B.  $8\sqrt{8} = 9\sqrt{7}$ .    C.  $8\sqrt{8} \geq 9\sqrt{7}$ .    D.  $9\sqrt{7} < 8\sqrt{8}$ .

**Câu 10.** Khử mẫu biểu thức sau  $xy\sqrt{\frac{4}{x^2y^2}}$  với  $x > 0; y > 0$  ta được

A. 4.    B.  $\sqrt{-xy}$ .    C.  $\sqrt{2}$ .    D. 2.

**Câu 11.** Khử mẫu biểu thức sau  $-2x^2y\sqrt{\frac{-9}{x^3y^2}}$  với  $x < 0; y > 0$  ta được:

A.  $-6\sqrt{x}$ .    B.  $-6\sqrt{-x}$ .    C.  $6\sqrt{x}$ .    D.  $-6\sqrt{x}$ .

**Câu 12.** Khử mẫu biểu thức sau  $-xy\sqrt{\frac{3}{xy}}$  với  $x < 0; y < 0$  ta được

A.  $\sqrt{xy}$ .    B.  $\sqrt{-xy}$ .    C.  $\sqrt{3xy}$ .    D.  $-\sqrt{3xy}$ .

**Câu 13.** Sau khi rút gọn biểu thức  $\frac{1}{5+3\sqrt{2}} + \frac{1}{5-3\sqrt{2}}$  ta được phân số tối giản  $\frac{a}{b}$  ( $a, b \in \mathbb{Z}$ ). Khi đó  $2a$

có giá trị

- A. 20.                      B. 10.                      C. 7.                      D. 14.

**Câu 14.** Sau khi rút gọn biểu thức  $\frac{2}{7+3\sqrt{5}} + \frac{2}{7-3\sqrt{5}}$  là phân số tối giản

$\frac{a}{b}$  ( $a, b \in \mathbb{Z}$ ). Khi đó  $a + b$  có giá trị là:

- A. 28.                      B. 7.                      C. 8.                      D. 14.

**Câu 15.** Rút gọn biểu thức  $\sqrt{32x} + \sqrt{50x} - 2\sqrt{8x} + \sqrt{18x}$  với  $x \geq 0$  ta được kết quả là:

- A.  $8\sqrt{2x}$ .                      B.  $10\sqrt{2x}$ .                      C.  $20\sqrt{x}$ .                      D.  $2\sqrt{10x}$ .

**Câu 16.** Rút gọn biểu thức  $\sqrt{27x} - \sqrt{48x} + 4\sqrt{75x} + \sqrt{243x}$  với  $x \geq 0$  ta được kết quả là:

- A.  $40\sqrt{3x}$ .                      B.  $28\sqrt{3x}$ .                      C.  $39\sqrt{x}$ .                      D.  $28\sqrt{x}$ .

**Câu 17.** Rút gọn biểu thức  $5\sqrt{a} - 4b\sqrt{25a^3} + 5a\sqrt{16ab^2} - \sqrt{9a}$  với  $a \geq 0, b \geq 0$  ta được kết quả là:

- A.  $2\sqrt{2a}$ .                      B.  $4\sqrt{a}$ .                      C.  $8\sqrt{a}$ .                      D.  $2\sqrt{a}$ .

**Câu 18.** Rút gọn biểu thức  $7\sqrt{x} + 11y\sqrt{36x^5} - 2x^2\sqrt{16xy^2} - \sqrt{25x}$  với  $x \geq 0, y \geq 0$  ta được kết quả là:

- A.  $2\sqrt{x} + 58x^2y\sqrt{x}$ .                      B.  $2\sqrt{x} - 58x^2y\sqrt{x}$ .                      C.  $2\sqrt{x} + 56x^2y\sqrt{x}$ .                      D.  $12\sqrt{x} + 58x^2y\sqrt{x}$ .

**Câu 19.** Giá trị của biểu thức  $2\sqrt{\frac{16a}{3}} - 3\sqrt{\frac{a}{27}} - 6\sqrt{\frac{4a}{75}}$  là

- A.  $\frac{23\sqrt{3a}}{15}$ .                      B.  $\frac{\sqrt{3a}}{15}$ .                      C.  $\frac{23\sqrt{a}}{15}$ .                      D.  $\frac{3\sqrt{3a}}{15}$ .

**Câu 20.** Rút gọn biểu thức  $5\sqrt{a} + 6\sqrt{\frac{a}{4}} - a\sqrt{\frac{4}{a}} + 5\sqrt{\frac{4a}{25}}$  với  $a > 0$ , ta được kết quả là:

- A.  $12\sqrt{a}$ .                      B.  $8\sqrt{a}$ .                      C.  $6\sqrt{a}$ .                      D.  $10\sqrt{a}$ .

**Câu 21.** Trong căn thức ở mẫu biểu thức  $\frac{2a}{2-\sqrt{a}}$  với  $a \geq 0; a \neq 4$  ta được:

- A.  $\frac{-2a\sqrt{a} + 4a}{4-a}$ .                      B.  $\frac{2a\sqrt{a} - 4a}{4-a}$ .                      C.  $\frac{2a\sqrt{a} + 4a}{4-a}$ .                      D.  $-\frac{2a\sqrt{a} + 4a}{4-a}$ .

**Câu 22.** Trục căn thức ở mẫu biểu thức  $\frac{3}{6+\sqrt{3a}}$  với  $a \geq 0; a \neq 12$  ta được:

- A.  $\frac{6+\sqrt{3a}}{12+a}$ .                      B.  $\frac{6-\sqrt{3a}}{12+a}$ .                      C.  $\frac{6+\sqrt{3a}}{12-a}$ .                      D.  $\frac{6-\sqrt{3a}}{12-a}$ .

**Câu 23.** Trục căn thức ở mẫu biểu thức  $\frac{6}{\sqrt{x} + \sqrt{2y}}$  với  $x \geq 0; y \geq 0$  ta được

A.  $\frac{6(\sqrt{x} - \sqrt{2y})}{x - 4y}$ .    B.  $\frac{6(\sqrt{x} + \sqrt{2y})}{x - 2y}$ .    C.  $\frac{6(\sqrt{x} - \sqrt{2y})}{x - 2y}$ .    D.  $\frac{6(\sqrt{x} + \sqrt{2y})}{x + 2y}$ .

**Câu 24.** Trục căn thức ở mẫu biểu thức  $\frac{4}{3\sqrt{x} + 2\sqrt{y}}$  với  $x \geq 0; y \geq 0; x \neq \frac{4}{9}y$  ta được:

A.  $\frac{3\sqrt{x} - 2\sqrt{y}}{9x - 4y}$ .    B.  $\frac{12\sqrt{x} - 8\sqrt{y}}{3x + 2y}$ .    C.  $\frac{12\sqrt{x} + 8\sqrt{y}}{9x + 4y}$ .    D.  $\frac{12\sqrt{x} - 8\sqrt{y}}{9x - 4y}$ .

**Câu 25.** Tính giá trị của biểu thức  $\left( \frac{\sqrt{14} - \sqrt{7}}{1 - \sqrt{2}} + \frac{\sqrt{15} - \sqrt{5}}{1 - \sqrt{3}} \right) : \frac{1}{\sqrt{7} - \sqrt{5}}$ .

A. -3.    B. -2.    C. 2.    D. 3.

**Câu 26.** Tính giá trị biểu thức  $\left( \frac{10 + 2\sqrt{10}}{\sqrt{5} + \sqrt{2}} + \frac{\sqrt{30} - \sqrt{6}}{\sqrt{5} - 1} \right) : \frac{1}{2\sqrt{5} - \sqrt{6}}$

A. 28.    B. 14.    C. -14.    D. 15.

**Câu 27.** Giá trị biểu thức  $\frac{3}{2}\sqrt{6} + 2\sqrt{\frac{2}{3}} - 4\sqrt{\frac{3}{2}}$  là giá trị nào sau đây?

A.  $\frac{\sqrt{6}}{6}$ .    B.  $\sqrt{6}$ .    C.  $\frac{\sqrt{6}}{2}$ .    D.  $\frac{\sqrt{6}}{3}$ .

**Câu 28.** Cho ba biểu thức  $P = x\sqrt{y} + y\sqrt{x}; Q = x\sqrt{x} + y\sqrt{y};$

$R = x - y$ . Biểu thức nào bằng với biểu thức  $(\sqrt{x} - \sqrt{y})(\sqrt{x} + \sqrt{y})$

với  $x, y$  không âm.

A.  $P$ .    B.  $Q$ .    C.  $R$ .    D.  $P - Q$ .

**Câu 29.** Cho ba biểu thức

$M = (\sqrt{x} + \sqrt{y})^2; N = \frac{x\sqrt{x} - y\sqrt{y}}{\sqrt{x} - \sqrt{y}}; P = (\sqrt{x} - \sqrt{y})(\sqrt{x} + \sqrt{y})$ .

Biểu thức nào bằng với biểu thức  $x + \sqrt{xy} + y$  với  $x, y, x \neq y$  không âm

A.  $M$ .    B.  $N$ .    C.  $P$ .    D.  $M.N$ .

**Câu 30.** Số nghiệm của phương trình  $\sqrt{4x^2 - 9} = 2\sqrt{2x + 3}$  là:

A. 1.    B. 0.    C. 3.    D. 2.

**Câu 31.** Số nghiệm của phương trình  $\sqrt{9x^2 - 16} = 3\sqrt{3x - 4}$  là

A. 1.    B. 0.    C. 3.    D. 2.

**Câu 32.** Phương trình  $\frac{2}{3}\sqrt{9x - 9} - \frac{1}{4}\sqrt{16x - 16} + 27\sqrt{\frac{x - 1}{81}} = 4$

có mấy nghiệm?

A. 1.    B. 0.    C. 3.    D. 2.

**Câu 33.** Phương trình  $\sqrt{4x - 8} - 2\sqrt{\frac{x - 2}{4}} + \sqrt{9x - 18} = 8$  có nghiệm là?

A.  $x = 8$ .    B.  $x = 4$ .    C.  $x = 2$ .    D.  $x = 6$ .

**Câu 34.** Giá trị của biểu thức  $\sqrt{\frac{3}{20}} + \sqrt{\frac{1}{60}} - 2\sqrt{\frac{1}{15}}$  là:

- A.** 1.                      **B.** 0.                      **C.** 3.                      **D.** 2.

**Câu 35.** Rút gọn biểu thức  $\frac{a}{\sqrt{5}+1} + \frac{a}{\sqrt{5}-2} - \frac{a}{3-\sqrt{5}} - \sqrt{5}a$  ta được:

- A.**  $2a$ .                      **B.**  $a$ .                      **C.**  $3a$ .                      **D.**  $12a$ .

## HƯỚNG DẪN

### Câu 1. Đáp án A.

Khử mẫu của biểu thức lấy căn

Với các biểu thức  $A, B$  mà  $A.B \geq 0; B \neq 0$ ,

$$\text{ta có } \sqrt{\frac{A}{B}} = \frac{\sqrt{AB}}{|B|} = \begin{cases} \frac{\sqrt{AB}}{B} & \text{khi } B > 0 \\ -\frac{\sqrt{AB}}{B} & \text{khi } B < 0 \end{cases}$$

### Câu 2. Đáp án B.

Với hai biểu thức  $A, B$  mà  $B \geq 0$  ta có

$$\sqrt{A^2 B} = |A| \sqrt{B} = \begin{cases} A\sqrt{B} & \text{khi } A \geq 0 \\ -A\sqrt{B} & \text{khi } A < 0 \end{cases}$$

### Câu 3. Đáp án C.

$$\text{Ta có: } \sqrt{81(2-y)^4} = \sqrt{81 \cdot [(2-y)^2]^2} = |(2-y)^2| \sqrt{81} = 9(2-y)^2.$$

### Câu 4. Đáp án D.

$$\text{Ta có: } \sqrt{144(3+2a)^4} = \sqrt{12^2 \cdot [(3+2a)^2]^2} = 12 \cdot |(3+2a)^2| = 12(3+2a)^2$$

### Câu 5. Đáp án B.

$$\text{Ta có: } 5y\sqrt{y} = \sqrt{(5y)^2 y} = \sqrt{25y^2 \cdot y} = \sqrt{25y^3}.$$

### Câu 6. Đáp án B.

$$\text{Ta có: } x\sqrt{\frac{-35}{x}} = -\sqrt{x^2 \cdot \frac{-35}{x}} = -\sqrt{-35x}$$

### Câu 7. Đáp án C.

$$\text{Ta có } 5x\sqrt{\frac{-12}{x^3}} = -\sqrt{(5x)^2 \cdot \frac{-12}{x^3}} = \sqrt{25x^2 \left(\frac{-12}{x}\right)} = -\sqrt{\frac{-300}{x}}$$

### Câu 8. Đáp án D.

$$\text{Ta có } 5\sqrt{3} = \sqrt{5^2 \cdot 3} = \sqrt{25 \cdot 3} = \sqrt{75}$$

$$4\sqrt{5} = \sqrt{4^2 \cdot 5} = \sqrt{16 \cdot 5} = \sqrt{80}$$

$$\text{Vì } 75 < 80 \Leftrightarrow \sqrt{75} < \sqrt{80} \Leftrightarrow 5\sqrt{3} < 4\sqrt{5}.$$

### Câu 9. Đáp án A.

$$\text{Ta có } 9\sqrt{7} = \sqrt{9^2 \cdot 7} = \sqrt{81 \cdot 7} = \sqrt{567}; \quad 8\sqrt{8} = \sqrt{8^2 \cdot 8} = \sqrt{64 \cdot 8} = \sqrt{512}$$

$$512 < 567 \Leftrightarrow \sqrt{512} < \sqrt{567} \Leftrightarrow 8\sqrt{8} < 9\sqrt{7}$$

### Câu 10. Đáp án D.

$$\text{Vì } x > 0; y > 0 \text{ nên } xy > 0. \text{ Từ đó ta có } xy\sqrt{\frac{4}{x^2 y^2}} = xy \cdot \frac{\sqrt{4}}{\sqrt{x^2 y^2}} = xy \cdot \frac{2}{xy} = 2.$$

### Câu 11. Đáp án B.

Vì  $x < 0; y > 0$  nên ta có:  $-2x^2y\sqrt{\frac{-9}{x^3y^2}} = -2x^2y\frac{\sqrt{-9x^3y^2}}{|x^3y^2|} = -2x^2y\frac{\sqrt{-9x.x^2}\cdot\sqrt{y^2}}{(-x^3y^2)}$

$$= 2\frac{\sqrt{-3^2x}\cdot|x|\cdot|y|}{xy} = \frac{2\cdot 3\sqrt{-x}\cdot(-x)\cdot y}{xy} = -6\sqrt{-x}.$$

**Câu 12. Đáp án D.**

Vì  $x < 0; y < 0$  nên  $xy > 0$ .

Từ đó ta có:  $-xy\sqrt{\frac{3}{xy}} = -xy\cdot\frac{\sqrt{3xy}}{xy} = -\sqrt{3xy}.$

**Câu 13. Đáp án A.**

Ta có  $\frac{1}{5+3\sqrt{2}} + \frac{1}{5-3\sqrt{2}} = \frac{5-3\sqrt{2}}{(5+3\sqrt{2})(5-3\sqrt{2})} + \frac{5+3\sqrt{2}}{(5+3\sqrt{2})(5-3\sqrt{2})} = \frac{10}{5^2-(3\sqrt{2})^2} = \frac{10}{25-18} = \frac{10}{7}$

Suy ra  $a = 10; b = 7 \Rightarrow 2a = 2\cdot 10 = 20$ .

**Câu 14. Đáp án C.**

Ta có:  $\frac{2}{7+3\sqrt{5}} + \frac{2}{7-3\sqrt{5}} = \frac{2(7-3\sqrt{5})}{(7+3\sqrt{5})(7-3\sqrt{5})} + \frac{2(7+3\sqrt{5})}{(7-3\sqrt{5})(7+3\sqrt{5})}$

$$= \frac{14-6\sqrt{5}}{7^2-(3\sqrt{5})^2} + \frac{14+6\sqrt{5}}{7^2-(3\sqrt{5})^2} = \frac{14-6\sqrt{5}+14+6\sqrt{5}}{49-9\cdot 5} = \frac{28}{4} = \frac{7}{1}$$

Suy ra  $a = 7; b = 1 \Rightarrow a + b = 7 + 1 = 8$ .

**Câu 15. Đáp án A.**

Ta có  $\sqrt{32x} + \sqrt{50x} - 2\sqrt{8x} + \sqrt{18x}$

$$= \sqrt{16\cdot 2x} + \sqrt{25\cdot 2x} - 2\sqrt{4\cdot 2x} + \sqrt{9\cdot 2x} = \sqrt{4^2\cdot 2x} + \sqrt{5^2\cdot 2x} - 2\sqrt{2^2\cdot 2x} + \sqrt{3^2\cdot 2x}$$

$$= 4\sqrt{2x} + 5\sqrt{2x} - 4\sqrt{2x} + 3\sqrt{2x} = \sqrt{2x}(4 + 5 - 4 + 3) = 8\sqrt{2x}.$$

**Câu 16. Đáp án B.**

Ta có  $\sqrt{27x} - \sqrt{48x} + 4\sqrt{75x} + \sqrt{243x} = \sqrt{9\cdot 3x} - \sqrt{16\cdot 3x} + 4\sqrt{25\cdot 3x} + \sqrt{81\cdot 3x}$

$$= \sqrt{3^2\cdot 3x} - \sqrt{4^2\cdot 3x} + 4\sqrt{5^2\cdot 3x} + \sqrt{9^2\cdot 3x}$$

$$= 3\sqrt{3x} - 4\sqrt{3x} + 4\cdot 5\sqrt{3x} + 9\sqrt{3x} = \sqrt{3x}(3 - 4 + 20 + 9) = 28\sqrt{3x}$$

**Câu 17. Đáp án D.**

Ta có:  $5\sqrt{a} - 4b\sqrt{25a^3} + 5a\sqrt{16ab^2} - \sqrt{9a}$

$$= 5\sqrt{a} - 4\sqrt{25a^3b^2} + 5\sqrt{16ab^2\cdot a^2} - \sqrt{9\cdot a}$$

$$= 5\sqrt{a} - 4\sqrt{25\cdot a^3b^2} + 5\sqrt{16\cdot a^3b^2} - 3\sqrt{a} = (5\sqrt{a} - 3\sqrt{a}) - (4\cdot 5\sqrt{a^3b^2} - 5\cdot 4\sqrt{a^3b^2}) = 2\sqrt{a}$$

**Câu 18. Đáp án A.**

$7\sqrt{x} + 11y\sqrt{36x^5} - 2x^2\sqrt{16xy^2} - \sqrt{25x} = 7\sqrt{x} + 11y\sqrt{6^2x^4\cdot x} - 2x^2\sqrt{4^2xy^2} - \sqrt{5^2x}$

$$= 7\sqrt{x} + 11y\cdot 6x^2\sqrt{x} - 2x^2\cdot 4y\sqrt{x} - 5\sqrt{x} = 7\sqrt{x} + 66x^2y\sqrt{x} - 8x^2y\sqrt{x} - 5\sqrt{x}$$

$$= (7\sqrt{x} - 5\sqrt{x}) + (66x^2y\sqrt{x} - 8x^2y\sqrt{x}) = 2\sqrt{x} + 58x^2y\sqrt{x}.$$

**Câu 19. Đáp án A.**

$$\begin{aligned} & 2\sqrt{\frac{16a}{3}} - 3\sqrt{\frac{a}{27}} - 6\sqrt{\frac{4a}{75}} = 2\sqrt{4^2 \cdot \frac{a}{3}} - 3\sqrt{\frac{1}{9} \cdot \frac{a}{3}} - 6\sqrt{\frac{4}{25} \cdot \frac{a}{3}} \\ & = 2 \cdot 4\sqrt{\frac{a}{3}} - 3 \cdot \frac{1}{3}\sqrt{\frac{a}{3}} - 6 \cdot \frac{2}{5}\sqrt{\frac{a}{3}} \\ & = \sqrt{\frac{a}{3}} \cdot \left(8 - 1 - \frac{12}{5}\right) = \frac{23}{5}\sqrt{\frac{a}{3}} = \frac{23}{5} \cdot \frac{\sqrt{3a}}{3} = \frac{23\sqrt{3a}}{15}. \end{aligned}$$

**Câu 20. Đáp án B.**

$$\begin{aligned} \text{Ta có } & 5\sqrt{a} + 6\sqrt{\frac{a}{4}} - a\sqrt{\frac{4}{a}} + 5\sqrt{\frac{4a}{25}} = 5\sqrt{a} + 6\sqrt{\frac{1}{4} \cdot a} - a\sqrt{4 \cdot \frac{1}{a}} + 5\sqrt{\frac{4}{25} \cdot a} \\ & = 5\sqrt{a} + 6\sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 \cdot a} - a\sqrt{2^2 \cdot \frac{1}{a}} + 5\sqrt{\left(\frac{2}{5}\right)^2 \cdot a} = 5\sqrt{a} + 6 \cdot \frac{1}{2}\sqrt{a} - 2a\sqrt{\frac{1}{a}} + 5 \cdot \frac{2}{5}\sqrt{a} \\ & = 5\sqrt{a} + 3\sqrt{a} - 2a\frac{\sqrt{a}}{a} + 2\sqrt{a} = 5\sqrt{a} + 3\sqrt{a} - 2\sqrt{a} + 2\sqrt{a} = 8\sqrt{a}. \end{aligned}$$

**Câu 21. Đáp án C.**

$$\text{Ta có } \frac{2a}{2 - \sqrt{a}} = \frac{2a(2 + \sqrt{a})}{(2 - \sqrt{a})(2 + \sqrt{a})} = \frac{2a\sqrt{a} + 4a}{4 - a}.$$

**Câu 22. Đáp án D.**

$$\text{Ta có } \frac{3}{6 + \sqrt{3a}} = \frac{3(6 - \sqrt{3a})}{(6 + \sqrt{3a})(6 - \sqrt{3a})} = \frac{3(6 - \sqrt{3a})}{6^2 - (\sqrt{3a})^2} = \frac{3(6 - \sqrt{3a})}{36 - 3a} = \frac{6 - \sqrt{3a}}{12 - a}.$$

**Câu 23. Đáp án C.**

$$\text{Ta có } \frac{6}{\sqrt{x} + \sqrt{2y}} = \frac{6(\sqrt{x} - \sqrt{2y})}{(\sqrt{x} + \sqrt{2y})(\sqrt{x} - \sqrt{2y})} = \frac{6(\sqrt{x} - \sqrt{2y})}{x - 2y}$$

**Câu 24. Đáp án D.**

$$\text{Ta có } \frac{4}{3\sqrt{x} + 2\sqrt{y}} = \frac{4(3\sqrt{x} - 2\sqrt{y})}{(3\sqrt{x} + 2\sqrt{y})(3\sqrt{x} - 2\sqrt{y})} = \frac{4(3\sqrt{x} - 2\sqrt{y})}{(3\sqrt{x})^2 - (2\sqrt{y})^2} = \frac{12\sqrt{x} - 8\sqrt{y}}{9x - 4y}.$$

**Câu 25. Đáp án B.**

$$\text{Ta có } \left( \frac{\sqrt{14} - \sqrt{7}}{1 - \sqrt{2}} + \frac{\sqrt{15} - \sqrt{5}}{1 - \sqrt{3}} \right) : \frac{1}{\sqrt{7} - \sqrt{5}} = \left( \frac{\sqrt{2} \cdot \sqrt{7} - \sqrt{7}}{1 - \sqrt{2}} + \frac{\sqrt{5} \cdot \sqrt{3} - \sqrt{5}}{1 - \sqrt{3}} \right) : \frac{1}{\sqrt{7} - \sqrt{5}}$$

$$= \left( \frac{\sqrt{7}(\sqrt{2}-1)}{1-\sqrt{2}} + \frac{\sqrt{5}(\sqrt{3}-1)}{1-\sqrt{3}} \right) \cdot (\sqrt{7}-\sqrt{5}) = (-\sqrt{7}-\sqrt{5}) \cdot (\sqrt{7}-\sqrt{5})$$

$$= -(\sqrt{7}+\sqrt{5})(\sqrt{7}-\sqrt{5}) = -(7-5) = -2.$$

**Câu 26. Đáp án B.**

Ta có  $\left( \frac{10+2\sqrt{10}}{\sqrt{5}+\sqrt{2}} + \frac{\sqrt{30}-\sqrt{6}}{\sqrt{5}-1} \right) : \frac{1}{2\sqrt{5}-\sqrt{6}}$

$$= \left( \frac{\sqrt{100}-\sqrt{40}}{\sqrt{5}+\sqrt{2}} + \frac{\sqrt{5}\cdot\sqrt{6}-\sqrt{5}}{\sqrt{5}-1} \right) : \frac{1}{2\sqrt{5}-\sqrt{6}} = \left( \frac{\sqrt{20}(\sqrt{5}+\sqrt{2})}{\sqrt{5}+\sqrt{2}} + \frac{\sqrt{6}\cdot(\sqrt{5}-1)}{\sqrt{5}-1} \right) : \frac{1}{2\sqrt{5}-\sqrt{6}}$$

$$= (2\sqrt{5}+\sqrt{6})(2\sqrt{5}-\sqrt{6}) = (2\sqrt{5})^2 - (\sqrt{6})^2 = 20 - 6 = 14$$

**Câu 27. Đáp án A.**

Ta có  $\frac{3}{2}\sqrt{6} + 2\sqrt{\frac{2}{3}} - 4\sqrt{\frac{3}{2}} = \frac{3}{2}\sqrt{6} + 2\cdot\frac{\sqrt{6}}{3} - 4\cdot\frac{\sqrt{6}}{2} = \sqrt{6}\left(\frac{3}{2} + \frac{2}{3} - 4\right) = \frac{\sqrt{6}}{6}$

**Câu 28. Đáp án C.**

$$P = x\sqrt{y} + y\sqrt{x} = (\sqrt{x})^2\sqrt{y} + (\sqrt{y})^2\sqrt{x} = \sqrt{xy}(\sqrt{x} + \sqrt{y})$$

$$Q = x\sqrt{x} + y\sqrt{y} = (\sqrt{x})^3 + (\sqrt{y})^3 = (\sqrt{x} + \sqrt{y})(x - \sqrt{xy} + y)$$

$$R = x - y = (\sqrt{x})^2 - (\sqrt{y})^2 = (\sqrt{x} - \sqrt{y})(\sqrt{x} + \sqrt{y})$$

Vậy  $R = (\sqrt{x} - \sqrt{y})(\sqrt{x} + \sqrt{y})$

**Câu 29. Đáp án B.**

$$M = (\sqrt{x} + \sqrt{y})^2 = (\sqrt{x})^2 + 2\sqrt{x}\cdot\sqrt{y} + (\sqrt{y})^2 = x + 2\sqrt{xy} + y$$

$$N = \frac{x\sqrt{x} - y\sqrt{y}}{\sqrt{x} - \sqrt{y}} = \frac{(\sqrt{x})^3 - (\sqrt{y})^3}{\sqrt{x} - \sqrt{y}} = \frac{(\sqrt{x} - \sqrt{y})(x + \sqrt{xy} + y)}{\sqrt{x} - \sqrt{y}} = x + \sqrt{xy} + y$$

$$P = (\sqrt{x} - \sqrt{y})(\sqrt{x} + \sqrt{y}) = (\sqrt{x})^2 - (\sqrt{y})^2 = x - y$$

Vậy  $N = x + \sqrt{xy} + y$ .

**Câu 30. Đáp án D.**

Ta có  $\sqrt{4x^2 - 9} = 2\sqrt{2x + 3} \Leftrightarrow \sqrt{4x^2 - 9} = \sqrt{4(2x + 3)} \Leftrightarrow \sqrt{4x^2 - 9} = \sqrt{8x + 12}$

Điều kiện:  $8x + 12 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq -\frac{3}{2}$

Với điều kiện trên ta có  $\sqrt{4x^2 - 9} = \sqrt{8x + 12} \Leftrightarrow 4x^2 - 9 = 8x + 12$

$$\Leftrightarrow 4x^2 - 8x - 21 = 0 \Leftrightarrow 4x^2 + 6x - 14x - 21 = 0$$

$$\Leftrightarrow 2x(2x + 3) - 7(2x + 3) = 0 \Leftrightarrow (2x - 7)(2x + 3) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 2x - 7 = 0 \\ 2x + 3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{7}{2} \\ \frac{-3}{2} \end{cases} \text{ (TM) } \text{Vậy phương}$$

trình đã cho có hai nghiệm phân biệt  $x = \frac{7}{2}; x = -\frac{3}{2}$

### Câu 31. Đáp án D.

$$\text{Ta có: } \sqrt{9x^2 - 16} = 3\sqrt{3x - 4} \Leftrightarrow \sqrt{9x^2 - 16} = \sqrt{9(3x - 4)} \Leftrightarrow \sqrt{9x^2 - 16} = \sqrt{27x - 36}$$

$$\text{Điều kiện: } 27x - 36 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq \frac{4}{3}$$

$$\text{Với điều kiện trên ta có: } \sqrt{9x^2 - 16} = \sqrt{27x - 36} \Leftrightarrow 9x^2 - 16 = 27x - 36 \Leftrightarrow 9x^2 - 27x + 20 = 0$$

$$\Leftrightarrow 9x^2 - 15x - 12x + 20 = 0$$

$$\Leftrightarrow 3x(3x - 5) - 4(3x - 5) = 0 \Leftrightarrow (3x - 4)(3x - 5) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3x - 4 = 0 \\ 3x - 5 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{4}{3} \\ x = \frac{5}{3} \end{cases} \text{ (TM)}$$

Vậy phương trình đã cho có hai nghiệm phân biệt:  $x = \frac{4}{3}; x = \frac{5}{3}$ .

### Câu 32. Đáp án A.

$$\text{Điều kiện } \begin{cases} 9x - 9 \geq 0 \\ 16x - 16 \geq 0 \\ \frac{x-1}{81} \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 9(x-1) \geq 0 \\ 16(x-1) \geq 0 \Leftrightarrow x-1 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 1 \\ x-1 \geq 0 \end{cases}$$

$$\text{Ta có } \frac{2}{3}\sqrt{9x-9} - \frac{1}{4}\sqrt{16x-16} + 27\sqrt{\frac{x-1}{81}} = 4$$

$$\Leftrightarrow \frac{2}{3}\sqrt{9(x-1)} - \frac{1}{4}\sqrt{16(x-1)} + 27\sqrt{\frac{1}{81} \cdot (x-1)} = 4$$

$$\Leftrightarrow \frac{2}{3} \cdot 3\sqrt{x-1} - \frac{1}{4} \cdot 4\sqrt{x-1} + 27 \cdot \frac{1}{9} \cdot \sqrt{x-1} = 4$$

$$\Leftrightarrow 2\sqrt{x-1} - \sqrt{x-1} + 3\sqrt{x-1} = 4 \Leftrightarrow 4\sqrt{x-1} = 4$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{x-1} = 1 \Leftrightarrow x-1 = 1 \Leftrightarrow x = 2 \text{ (TM)}$$

Vậy phương trình có một nghiệm  $x = 2$ .

### Câu 33. Đáp án D.

$$\text{Điều kiện: } \begin{cases} 4x - 8 \geq 0 \\ 9x - 18 \geq 0 \\ x - 24 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4(x-2) \geq 0 \\ 9(x-2) \geq 0 \Leftrightarrow x-2 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 2 \\ x-2 \geq 0 \end{cases}$$

Ta có:  $\sqrt{4x-8} - 2\sqrt{\frac{x-2}{4}} + \sqrt{9x-18} = 8 \Leftrightarrow \sqrt{4(x-2)} - 2\sqrt{\frac{1}{4} \cdot (x-2)} + \sqrt{9 \cdot (x-2)} = 8$

$$\Leftrightarrow 2\sqrt{x-2} - 2 \cdot \frac{1}{2}\sqrt{x-2} + 3\sqrt{x-2} = 8 \Leftrightarrow 2\sqrt{x-2} - \sqrt{x-2} + 3\sqrt{x-2} = 8$$

$$\Leftrightarrow 4\sqrt{x-2} = 8 \Leftrightarrow \sqrt{x-2} = 2 \Leftrightarrow x-2 = 4 \Leftrightarrow x = 6 \text{ (TM)}$$

Vậy phương trình có một nghiệm  $x = 6$ .

**Câu 34. Đáp án B.**

$$\begin{aligned} \text{Ta có } \sqrt{\frac{3}{20}} + \sqrt{\frac{1}{60}} - 2\sqrt{\frac{1}{15}} &= \frac{\sqrt{3 \cdot 20}}{20} + \frac{\sqrt{60}}{60} - \frac{2\sqrt{15}}{15} \\ &= \frac{3\sqrt{60} + \sqrt{60} - 4 \cdot \sqrt{4 \cdot 15}}{60} = \frac{4\sqrt{60} - 4\sqrt{60}}{60} = 0. \end{aligned}$$

**Câu 35. Đáp án B.**

$$\begin{aligned} \text{Ta có } \frac{a}{\sqrt{5}+1} + \frac{a}{\sqrt{5}-2} - \frac{a}{3-\sqrt{5}} - \sqrt{5}a &= \frac{a(\sqrt{5}-1)}{(\sqrt{5}-1)(\sqrt{5}+1)} + \frac{a(\sqrt{5}+2)}{(\sqrt{5}-2)(\sqrt{5}+2)} - \frac{a(3+\sqrt{5})}{(3+\sqrt{5})(3-\sqrt{5})} - \sqrt{5}a \\ &= \frac{a(\sqrt{5}-1)}{4} + \frac{a(\sqrt{5}+2)}{1} - \frac{a(3+\sqrt{5})}{4} - \sqrt{5}a \\ &= \frac{a(\sqrt{5}-1) + 4a(2+\sqrt{5}) - a(3+\sqrt{5}) - 4\sqrt{5}a}{4} \\ &= \frac{a(\sqrt{5}-1+8+4\sqrt{5}-3-\sqrt{5}-4\sqrt{5})}{4} = \frac{4a}{4} = a \end{aligned}$$

### III. BÀI TẬP TỰ LUYỆN

**Bài 1:** Đưa thừa số ra ngoài dấu căn:

a)  $\sqrt{49.360}$

b)  $-\sqrt{500.162}$

c)  $\sqrt{125a^2}$  với  $a < 0$

d)  $\frac{1}{3}\sqrt{225a^2}$  với  $a$  tùy ý

**Bài 2:** Đưa thừa số vào trong dấu căn:

a)  $5\sqrt{2}$

b)  $-2\sqrt{5}$

c)  $x\sqrt{\frac{13}{xy}}$  với  $x > 0; y > 0$  d)  $x\sqrt{\frac{-37}{x}}$  với  $x < 0$

**Bài 3:** Sắp xếp theo thứ tự tăng dần:

a)  $5\sqrt{2}; 2\sqrt{5}; 2\sqrt{3}; 3\sqrt{2}$  b)  $\sqrt{27}; 6\sqrt{\frac{1}{3}}; 2\sqrt{28}; 5\sqrt{7}$

c)  $4\sqrt{2}; \sqrt{37}; 3\sqrt{7}; 2\sqrt{15}$

d)  $3\sqrt{6}; 2\sqrt{7}; \sqrt{39}; 5\sqrt{2}$

**Bài 4:** So sánh:

a)  $\sqrt{15} - \sqrt{14}$  và  $\sqrt{14} - \sqrt{13}$

b)  $\sqrt{105} - \sqrt{101}$  và  $\sqrt{101} - \sqrt{97}$

**Bài 5:** Rút gọn các biểu thức:

a)  $3\sqrt{2} + 4\sqrt{8} - \sqrt{18}$

b)  $\sqrt{3} - \frac{1}{3}\sqrt{27} + 2\sqrt{507}$

c)  $\sqrt{25a} + \sqrt{49a} - \sqrt{64a}$  với  $a \geq 0$

d)  $-\sqrt{36b} - \frac{1}{3}\sqrt{54b} + \frac{1}{5}\sqrt{150b}$  với  $b \geq 0$

**Bài 6:** Giải các phương trình:

a)  $5\sqrt{12x} - 4\sqrt{3x} + 2\sqrt{48x} = 14$

b)  $\sqrt{4x-20} + \sqrt{x-5} - \frac{1}{3}\sqrt{9x-45} = 4$

c)  $\frac{3\sqrt{x}-5}{2} - \frac{2\sqrt{x}-7}{3} = \sqrt{x}-1$

d)  $\sqrt{36x-72} - 15\sqrt{\frac{x-2}{25}} = 4(5 + \sqrt{x-2})$

**Bài 7:** Phân tích các đa thức sau thành nhân tử

a)  $3 - \sqrt{3} + \sqrt{15} - 3\sqrt{5}$

b)  $\sqrt{1-a} + \sqrt{1-a^2}$  với  $-1 < a < 1$

c)  $\sqrt{a^3} - \sqrt{b^3} + \sqrt{a^2b} - \sqrt{ab^2}$  với  $a > 0; b > 0$

d)  $x - y + \sqrt{xy^2} - \sqrt{y^3}$  với  $a > 0; b > 0$

**Bài 8:** Khử mẫu của các biểu thức dưới dấu căn và rút gọn (nếu có thể được):

a)  $\sqrt{\frac{3}{7}}$                       b)  $\sqrt{\frac{7}{20}}$                       c)  $\sqrt{\frac{11}{12}}$                       d)  $\sqrt{\frac{(\sqrt{3}-\sqrt{2})^2}{3}}$

**Bài 9:** Khử mẫu của các biểu thức dưới dấu căn và rút gọn (nếu có thể được):

a)  $-xy\sqrt{\frac{y}{x}}$  với  $x > 0; y \geq 0$                       b)  $\sqrt{\frac{-3x^3}{35}}$  với  $x < 0$

c)  $\sqrt{\frac{5a^3}{49b}}$  với  $a \geq 0; b > 0$                       d)  $-7xy\sqrt{\frac{3}{xy}}$  với  $x < 0; y < 0$

**Bài 10:** Trục căn thức ở mẫu

a)  $\frac{2-\sqrt{3}}{3\sqrt{6}}$                       b)  $\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}$                       c)  $\frac{1}{2\sqrt{2}-3\sqrt{3}}$                       d)  $\frac{1+\sqrt{a}}{\sqrt{a}}$  với  $a > 0$

**Bài 11:** Trục căn thức ở mẫu

a)  $\frac{\sqrt{5}-1}{\sqrt{5}+1}$                       b)  $\frac{37}{7+2\sqrt{3}}$   
 c)  $\frac{2\sqrt{10}-5}{4-\sqrt{10}}$                       d)  $\frac{1+\sqrt{a}}{2-\sqrt{a}}$  với  $a > 0; a \neq 4$

**Bài 12:** Rút gọn các biểu thức sau:

a)  $\frac{5\sqrt{60} \cdot 3\sqrt{15}}{15\sqrt{50} \cdot 2\sqrt{18}}$                       b)  $\sqrt{27(\sqrt{3}-\sqrt{5})^2}$   
 c)  $\frac{x+\sqrt{xy}}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}$  với  $x > 0; y > 0$                       d)  $\frac{x-2}{\sqrt{x^2-4x+4}}$  với  $x \neq 2$

**Bài 13:** Thực hiện phép tính:

a)  $\frac{1}{3+\sqrt{2}} + \frac{1}{3-\sqrt{2}}$                       b)  $\frac{2}{3\sqrt{2}-4} - \frac{2}{3\sqrt{2}+4}$   
 c)  $\frac{\sqrt{5}-\sqrt{3}}{\sqrt{5}+\sqrt{3}} + \frac{\sqrt{5}+\sqrt{3}}{\sqrt{5}-\sqrt{3}}$                       d)  $\frac{3}{2\sqrt{2}-3\sqrt{3}} - \frac{3}{2\sqrt{2}+3\sqrt{3}}$

**Bài 14:** Giải các phương trình:

a)  $\sqrt{2x-1} = \sqrt{2}-1$                       b)  $\sqrt{3x+11} = 3+\sqrt{2}$   
 c)  $\sqrt{x+5} = \sqrt{3}-2$                       d)  $\sqrt{x+38} = 3+\sqrt{5}$

**Bài 15:** Tính giá trị của các biểu thức sau:

a)  $\frac{(1+\sqrt{x})^2 - 4\sqrt{x}}{1-\sqrt{x}}$  với  $x = 2$                       b)  $\frac{(\sqrt{x}-\sqrt{y})^2 + 4\sqrt{xy}}{1+\sqrt{xy}}$  với  $\begin{cases} x=2 \\ y=1 \end{cases}$

c)  $\frac{x+y}{y} \cdot \sqrt{\frac{x^3y^2 + 2x^2y^3 + xy^4}{x^2 + 2xy + y^2}}$  với  $\begin{cases} x=2 \\ y=1 \end{cases}$

## HƯỚNG DẪN GIẢI

**Bài 1:** Đưa thừa số ra ngoài dấu căn:

a) Biểu thức  $\sqrt{49.360} = \sqrt{49.36.10}$   
 $= \sqrt{49} \cdot \sqrt{36} \cdot \sqrt{10} = 7.6 \cdot \sqrt{10} = 42\sqrt{10}$

Vậy biểu thức có giá trị là  $42\sqrt{10}$

b) Biểu thức  $-\sqrt{500.162} = -\sqrt{100.5.81.2}$   
 $= -\sqrt{100} \cdot \sqrt{81} \cdot \sqrt{10} = -10.9 \cdot \sqrt{10} = -90\sqrt{10}$

Vậy biểu thức có giá trị là  $-90\sqrt{10}$

c) Biểu thức  $\sqrt{125a^2} = \sqrt{25.5.a^2} = \sqrt{25} \cdot \sqrt{a^2} \cdot \sqrt{5} = 5|a| \cdot \sqrt{5}$

với  $a < 0$  nên  $|a| = -a$ . Vậy  $\sqrt{125a^2} = -5a\sqrt{5}$

d) Biểu thức  $\frac{1}{3}\sqrt{225a^2} = \frac{1}{3}\sqrt{225} \cdot \sqrt{a^2} = \frac{1}{3} \cdot 15 \cdot |a| = 5|a|$

Vậy biểu thức có giá trị là  $5|a|$

**Bài 2:** Đưa thừa số vào trong dấu căn:

a)  $5\sqrt{2} = \sqrt{5^2 \cdot 2} = \sqrt{50}$

b)  $-2\sqrt{5} = -\sqrt{2^2 \cdot 5} = -\sqrt{20}$

c)  $x\sqrt{\frac{13}{xy}} = \sqrt{x^2 \cdot \frac{13}{xy}} = \sqrt{\frac{13x}{y}}$  với  $x > 0; y > 0$

d)  $x\sqrt{\frac{-37}{x}} = -\sqrt{x^2 \cdot \frac{-37}{x}} = -\sqrt{-37x}$  với  $x < 0$

**Bài 3:** Sắp xếp theo thứ tự tăng dần:

a) Ta có:  $5\sqrt{2} = \sqrt{50}$ ;  $2\sqrt{5} = \sqrt{20}$ ;  $2\sqrt{3} = \sqrt{12}$ ;  $3\sqrt{2} = \sqrt{18}$

Vì  $\sqrt{12} < \sqrt{18} < \sqrt{20} < \sqrt{50}$

Do đó:  $2\sqrt{3} < 3\sqrt{2} < 2\sqrt{5} < 5\sqrt{2}$

b)  $\sqrt{27}$ ;  $6\sqrt{\frac{1}{3}} = \sqrt{12}$ ;  $2\sqrt{28} = \sqrt{112}$ ;  $5\sqrt{7} = \sqrt{175}$

Vì  $\sqrt{12} < \sqrt{27} < \sqrt{112} < \sqrt{175}$

Do đó:  $6\sqrt{\frac{1}{3}} < \sqrt{27} < 2\sqrt{28} < 5\sqrt{7}$

c) Ta có:  $4\sqrt{2} = \sqrt{32}$ ;  $\sqrt{37}$ ;  $3\sqrt{7} = \sqrt{63}$ ;  $2\sqrt{15} = \sqrt{60}$

Vì  $\sqrt{32} < \sqrt{37} < \sqrt{60} < \sqrt{63}$

Do đó:  $4\sqrt{2} < \sqrt{37} < 2\sqrt{15} < 3\sqrt{7}$

d) Ta có:  $3\sqrt{6} = \sqrt{54}$ ;  $2\sqrt{7} = \sqrt{28}$ ;  $\sqrt{39}$ ;  $5\sqrt{2} = \sqrt{50}$

Vì  $\sqrt{28} < \sqrt{39} < \sqrt{50} < \sqrt{54}$

Do đó:  $2\sqrt{7} < \sqrt{39} < 5\sqrt{2} < 3\sqrt{6}$

**Bài 4:** So sánh:

a)  $\sqrt{15} - \sqrt{14}$  và  $\sqrt{14} - \sqrt{13}$

Ta có:

$$\begin{aligned} * \sqrt{15} - \sqrt{14} &= \frac{(\sqrt{15} - \sqrt{14})(\sqrt{15} + \sqrt{14})}{\sqrt{15} + \sqrt{14}} \\ &= \frac{(\sqrt{15})^2 - (\sqrt{14})^2}{\sqrt{15} + \sqrt{14}} = \frac{15 - 14}{\sqrt{15} + \sqrt{14}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{15} + \sqrt{14}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} * \sqrt{14} - \sqrt{13} &= \frac{(\sqrt{14} - \sqrt{13})(\sqrt{14} + \sqrt{13})}{\sqrt{14} + \sqrt{13}} \\ &= \frac{(\sqrt{14})^2 - (\sqrt{13})^2}{\sqrt{14} + \sqrt{13}} = \frac{14 - 13}{\sqrt{14} + \sqrt{13}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{14} + \sqrt{13}} \end{aligned}$$

$$\text{Vì } \sqrt{15} + \sqrt{14} > \sqrt{14} + \sqrt{13} \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{15} + \sqrt{14}} < \frac{1}{\sqrt{14} + \sqrt{13}}$$

Vậy  $\sqrt{15} - \sqrt{14} < \sqrt{14} - \sqrt{13}$

b)  $\sqrt{105} - \sqrt{101}$  và  $\sqrt{101} - \sqrt{97}$

$$\begin{aligned} \text{Ta có: } \sqrt{105} - \sqrt{101} &= \frac{(\sqrt{105} - \sqrt{101})(\sqrt{105} + \sqrt{101})}{\sqrt{105} + \sqrt{101}} \\ &= \frac{(\sqrt{105})^2 - (\sqrt{101})^2}{\sqrt{105} + \sqrt{101}} = \frac{105 - 101}{\sqrt{105} + \sqrt{101}} \\ &= \frac{4}{\sqrt{105} + \sqrt{101}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sqrt{101} - \sqrt{97} &= \frac{(\sqrt{101} - \sqrt{97})(\sqrt{101} + \sqrt{97})}{\sqrt{101} + \sqrt{97}} \\ &= \frac{(\sqrt{101})^2 - (\sqrt{97})^2}{\sqrt{101} + \sqrt{97}} = \frac{101 - 97}{\sqrt{101} + \sqrt{97}} \\ &= \frac{4}{\sqrt{101} + \sqrt{97}} \end{aligned}$$

$$\text{Vì } \sqrt{105} + \sqrt{101} > \sqrt{101} + \sqrt{97} \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{105} + \sqrt{101}} < \frac{1}{\sqrt{101} + \sqrt{97}}$$

Vậy  $\sqrt{105} - \sqrt{101} < \sqrt{101} - \sqrt{97}$

**Bài 5:** Rút gọn các biểu thức:

$$\begin{aligned} \text{a) Biểu thức } 3\sqrt{2} + 4\sqrt{8} - \sqrt{18} &= 3\sqrt{2} + 4.2\sqrt{2} - 3\sqrt{2} \\ &= 3\sqrt{2} + 8\sqrt{2} - 3\sqrt{2} = 8\sqrt{2} \end{aligned}$$

Biểu thức rút gọn là:  $8\sqrt{2}$

b) Biểu thức  $\sqrt{3} - \frac{1}{3}\sqrt{27} + 2\sqrt{507} = \sqrt{3} - \frac{1}{3} \cdot 3\sqrt{3} + 2 \cdot 13\sqrt{3}$

$$= \sqrt{3} - \sqrt{3} + 26\sqrt{3} = 26\sqrt{3}$$

Biểu thức rút gọn là:  $26\sqrt{3}$

c) Biểu thức  $\sqrt{25a} + \sqrt{49a} - \sqrt{64a} = 5\sqrt{a} + 7\sqrt{a} - 8\sqrt{a}$

$$= (5+7-8)\sqrt{a} = 4\sqrt{a} \text{ với } a \geq 0$$

Biểu thức rút gọn là:  $4\sqrt{a}$

d) Biểu thức  $-\sqrt{36b} - \frac{1}{3}\sqrt{54b} + \frac{1}{5}\sqrt{150b} = -6\sqrt{b} - \frac{1}{3} \cdot 3\sqrt{6a} + \frac{1}{5} \cdot 5\sqrt{6b}$

$$= -6\sqrt{b} - \sqrt{6b} + \sqrt{6b} = -6\sqrt{b} \text{ với } b \geq 0$$

Biểu thức rút gọn là:  $-6\sqrt{b}$

**Bài 6:** Giải các phương trình:

a)  $5\sqrt{12x} - 4\sqrt{3x} + 2\sqrt{48x} = 14$

Điều kiện:  $x \geq 0$

Phương trình biến đổi về dạng:

$$5\sqrt{12x} - 4\sqrt{3x} + 2\sqrt{48x} = 14$$

$$\Leftrightarrow 10\sqrt{3x} - 4\sqrt{3x} + 8\sqrt{3x} = 14$$

$$\Leftrightarrow (10 - 4 + 8)\sqrt{3x} = 14$$

$$\Leftrightarrow 14\sqrt{3x} = 14$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{3x} = 1 \Rightarrow 3x = 1 \Leftrightarrow x = \frac{1}{3} \text{ (thỏa mãn điều kiện)}$$

b)  $\sqrt{4x-20} + \sqrt{x-5} - \frac{1}{3}\sqrt{9x-45} = 4$

Điều kiện:  $x \geq 5$

$$\sqrt{4x-20} + \sqrt{x-5} - \frac{1}{3}\sqrt{9x-45} = 4 \Leftrightarrow 2\sqrt{x-5} + \sqrt{x-5} - \frac{1}{3} \cdot 3\sqrt{x-5} = 4$$

$$\Leftrightarrow 2\sqrt{x-5} = 4$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{x-5} = 2 \Rightarrow x-5 = 4 \Leftrightarrow x = 9 \text{ (thỏa mãn điều kiện)}$$

Vậy phương trình đã cho có nghiệm  $x = 9$

c)  $\frac{3\sqrt{x}-5}{2} - \frac{2\sqrt{x}-7}{3} = \sqrt{x}-1$

Điều kiện:  $x \geq 0$

$$\frac{3\sqrt{x}-5}{2} - \frac{2\sqrt{x}-7}{3} = \sqrt{x}-1$$

$$\Leftrightarrow \frac{3(3\sqrt{x}-5) - 2(2\sqrt{x}-7)}{6} = \sqrt{x}-1$$

$$\Leftrightarrow 3(3\sqrt{x}-5) - 2(2\sqrt{x}-7) = 6(\sqrt{x}-1)$$

$$\Leftrightarrow 9\sqrt{x} - 15 - 4\sqrt{x} + 14 = 6\sqrt{x} - 6$$

$$\Leftrightarrow 9\sqrt{x} - 4\sqrt{x} - 6\sqrt{x} = 15 - 14 - 6$$

$$\Leftrightarrow -\sqrt{x} = -5$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{x} = 5 \Rightarrow x = 25 \text{ (thỏa mãn điều kiện)}$$

Vậy phương trình đã cho có nghiệm  $x = 25$

$$d) \sqrt{36x - 72} - 15\sqrt{\frac{x-2}{25}} = 4(5 + \sqrt{x-2})$$

Điều kiện:  $x \geq 2$

$$\sqrt{36x - 72} - 15\sqrt{\frac{x-2}{25}} = 4(5 + \sqrt{x-2})$$

$$\Leftrightarrow 6\sqrt{x-2} - 15 \cdot \frac{1}{5}\sqrt{x-2} = 20 + 4\sqrt{x-2}$$

$$\Leftrightarrow 6\sqrt{x-2} - 3\sqrt{x-2} - 4\sqrt{x-2} = 20$$

$$\Leftrightarrow -\sqrt{x-2} = 20$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{x-2} = -20$$

Ta có:  $\forall x \geq 2 \Rightarrow VT = \sqrt{x-2} \geq 0; VP = -20 < 0 \Rightarrow$  Phương trình vô nghiệm.

Vậy phương trình đã cho vô nghiệm.

**Bài 7:** Phân tích các đa thức sau thành nhân tử

$$a) \text{ Biểu thức } 3 - \sqrt{3} + \sqrt{15} - 3\sqrt{5} = \sqrt{3}(\sqrt{3} - 1) + \sqrt{5}(\sqrt{3} - 3)$$

$$= \sqrt{3}(\sqrt{3} - 1) - \sqrt{5} \cdot \sqrt{3}(\sqrt{3} - 1)$$

$$= \sqrt{3}(\sqrt{3} - 1)(1 - \sqrt{5})$$

$$b) \text{ Biểu thức } \sqrt{1-a} + \sqrt{1-a^2} = \sqrt{1-a} + \sqrt{(1-a)(1+a)}$$

$$= \sqrt{1-a}(1 + \sqrt{1+a}) \text{ với } -1 < a < 1$$

$$c) \text{ Biểu thức } \sqrt{a^3} - \sqrt{b^3} + \sqrt{a^2b} - \sqrt{ab^2} \text{ với } a > 0; b > 0$$

$$= (\sqrt{a^3} - \sqrt{ab^2}) + (\sqrt{a^2b} - \sqrt{b^3})$$

$$= \sqrt{a}(\sqrt{a^2} - \sqrt{b^2}) + \sqrt{b}(\sqrt{a^2} - \sqrt{b^2})$$

$$= \sqrt{a}(a-b) + \sqrt{b}(a-b)$$

$$= (a-b)(\sqrt{a} + \sqrt{b})$$

$$= (\sqrt{a} - \sqrt{b})(\sqrt{a} + \sqrt{b})(\sqrt{a} + \sqrt{b})$$

$$= (\sqrt{a} - \sqrt{b})(\sqrt{a} + \sqrt{b})^2$$

$$d) x - y + \sqrt{xy^2} - \sqrt{y^3} \text{ với } x > 0; y > 0$$

$$= (x - y) + (y\sqrt{x} - y\sqrt{y})$$

$$\begin{aligned}
 &= (\sqrt{x} - \sqrt{y})(\sqrt{x} + \sqrt{y}) + y(\sqrt{x} - \sqrt{y}) \\
 &= (\sqrt{x} - \sqrt{y})(\sqrt{x} + \sqrt{y} + y)
 \end{aligned}$$

**Bài 8:** Khử mẫu của các biểu thức dưới dấu căn và rút gọn (nếu có thể được):

a) Biểu thức  $\sqrt{\frac{3}{7}} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{7}} = \frac{\sqrt{3} \cdot \sqrt{7}}{\sqrt{7} \cdot \sqrt{7}} = \frac{\sqrt{21}}{7}$

b) Biểu thức  $\sqrt{\frac{7}{20}} = \frac{\sqrt{7}}{\sqrt{20}} = \frac{\sqrt{7}}{2\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{7} \cdot \sqrt{5}}{2\sqrt{5} \cdot \sqrt{5}} = \frac{\sqrt{35}}{10}$

c) Biểu thức  $\sqrt{\frac{11}{12}} = \frac{\sqrt{11}}{\sqrt{12}} = \frac{\sqrt{11}}{2\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{11} \cdot \sqrt{3}}{2\sqrt{3} \cdot \sqrt{3}} = \frac{\sqrt{33}}{6}$

d) Biểu thức  $\sqrt{\frac{(\sqrt{3} - \sqrt{2})^2}{3}} = \frac{\sqrt{(\sqrt{3} - \sqrt{2})^2}}{\sqrt{3}}$   
 $= \frac{|\sqrt{3} - \sqrt{2}|}{\sqrt{3}} = \frac{(\sqrt{3} - \sqrt{2})\sqrt{3}}{\sqrt{3} \cdot \sqrt{3}} = \frac{3 - \sqrt{6}}{3}$

**Bài 9:** Khử mẫu của các biểu thức dưới dấu căn và rút gọn (nếu có thể được):

a) Biểu thức  $-xy\sqrt{\frac{y}{x}} = -xy\sqrt{\frac{xy}{x^2}} = -xy \cdot \frac{1}{|x|} \sqrt{xy}$   
 $= -xy \cdot \frac{1}{x} \sqrt{xy} = -y\sqrt{xy}$  với  $x > 0; y \geq 0$

b) Biểu thức  $\sqrt{\frac{-3x^3}{35}} = \sqrt{\frac{-3x^2 \cdot x \cdot 35}{35^2}} = \frac{|x|}{35} \cdot \sqrt{-105x} = -\frac{x}{35} \cdot \sqrt{-105x}$  với  $x < 0$

c) Biểu thức  $\sqrt{\frac{5a^3}{49b}} = \sqrt{\frac{5a^2 \cdot ab}{49b^2}} = \frac{|a|}{7|b|} \cdot \sqrt{5ab} = \frac{a}{7b} \cdot \sqrt{5ab}$  với  $a \geq 0; b > 0$

d) Biểu thức  $-7xy\sqrt{\frac{3}{xy}} = -7xy\sqrt{\frac{3xy}{(xy)^2}} = -7xy \cdot \frac{1}{|xy|} \sqrt{3xy}$   
 $= -7xy \cdot \frac{1}{(-xy)} \sqrt{3xy} = 7\sqrt{3xy}$  với  $x < 0; y < 0$

**Bài 10:** Trục căn thức ở mẫu

a)  $\frac{2 - \sqrt{3}}{3\sqrt{6}} = \frac{(2 - \sqrt{3})\sqrt{6}}{3\sqrt{6} \cdot \sqrt{6}} = \frac{2\sqrt{6} - \sqrt{18}}{18} = \frac{2\sqrt{6} - 3\sqrt{2}}{18}$

b)  $\frac{1}{\sqrt{2} + \sqrt{3}} = \frac{\sqrt{2} - \sqrt{3}}{(\sqrt{2} + \sqrt{3})(\sqrt{2} - \sqrt{3})}$   
 $= \frac{\sqrt{2} - \sqrt{3}}{(\sqrt{2})^2 - (\sqrt{3})^2} = \frac{\sqrt{2} - \sqrt{3}}{-1} = \sqrt{3} - \sqrt{2}$

c)  $\frac{1}{2\sqrt{2} - 3\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{2} + 3\sqrt{3}}{(2\sqrt{2} - 3\sqrt{3})(2\sqrt{2} + 3\sqrt{3})}$

$$= \frac{2\sqrt{2} + 3\sqrt{3}}{(2\sqrt{2})^2 - (3\sqrt{3})^2} = \frac{2\sqrt{2} + 3\sqrt{3}}{8 - 27}$$

$$= \frac{2\sqrt{2} + 3\sqrt{3}}{-19}$$

$$d) \frac{1 + \sqrt{a}}{\sqrt{a}} = \frac{(1 + \sqrt{a})\sqrt{a}}{\sqrt{a} \cdot \sqrt{a}} = \frac{\sqrt{a} + a}{a} \text{ với } a > 0$$

**Bài 11:** Trục căn thức ở mẫu

$$a) \text{ Biểu thức } \frac{\sqrt{5} - 1}{\sqrt{5} + 1} = \frac{(\sqrt{5} - 1)(\sqrt{5} - 1)}{(\sqrt{5} + 1)(\sqrt{5} - 1)}$$

$$= \frac{(\sqrt{5} - 1)^2}{(\sqrt{5})^2 - 1} = \frac{6 - 2\sqrt{5}}{4} = \frac{3 - \sqrt{5}}{2}$$

$$b) \text{ Biểu thức } \frac{37}{7 + 2\sqrt{3}} = \frac{37(7 - 2\sqrt{3})}{(7 + 2\sqrt{3})(7 - 2\sqrt{3})}$$

$$= \frac{37(7 - 2\sqrt{3})}{7^2 - (2\sqrt{3})^2} = \frac{37(7 - 2\sqrt{3})}{37} = 7 - 2\sqrt{3}$$

$$c) \text{ Biểu thức } \frac{2\sqrt{10} - 5}{4 - \sqrt{10}} = \frac{(2\sqrt{10} - 5)(4 + \sqrt{10})}{(4 - \sqrt{10})(4 + \sqrt{10})}$$

$$= \frac{8\sqrt{10} + 20 - 20 - 5\sqrt{10}}{4^2 - \sqrt{10}^2} = \frac{3\sqrt{10}}{6} = \frac{\sqrt{10}}{2}$$

$$d) \text{ Biểu thức } \frac{1 + \sqrt{a}}{2 - \sqrt{a}} = \frac{(1 + \sqrt{a})(2 + \sqrt{a})}{(2 - \sqrt{a})(2 + \sqrt{a})}$$

$$= \frac{2 + \sqrt{a} + 2\sqrt{a} + a}{2^2 - (\sqrt{a})^2} = \frac{2 + 3\sqrt{a} + a}{4 - a} \text{ với } a > 0; a \neq 4$$

**Bài 12:** Rút gọn các biểu thức sau:

$$a) \text{ Biểu thức } \frac{5\sqrt{60} \cdot 3\sqrt{15}}{15\sqrt{50} \cdot 2\sqrt{18}} = \frac{15\sqrt{60 \cdot 15}}{30\sqrt{50 \cdot 18}} = \frac{\sqrt{4 \cdot 15 \cdot 15}}{2\sqrt{50 \cdot 2 \cdot 9}} = \frac{2 \cdot 15}{2 \cdot 10 \cdot 3} = \frac{1}{2}$$

$$b) \text{ Biểu thức } \sqrt{27(\sqrt{3} - \sqrt{5})^2} = 3\sqrt{3} \cdot |\sqrt{3} - \sqrt{5}| = 3\sqrt{3} \cdot (\sqrt{5} - \sqrt{3})$$

$$c) \text{ Biểu thức } \frac{x + \sqrt{xy}}{\sqrt{x} + \sqrt{y}} = \frac{\sqrt{x}(\sqrt{x} + \sqrt{y})}{\sqrt{x} + \sqrt{y}} = \sqrt{x} \text{ với } x > 0; y > 0 \text{ và } x \neq y$$

$$d) \text{ Biểu thức } \frac{x - 2}{\sqrt{x^2 - 4x + 4}} = \frac{x - 2}{\sqrt{(x - 2)^2}} = \frac{x - 2}{|x - 2|} \text{ với } x \neq 2$$

Nếu  $x < 2$  thì  $|x-2| = -(x-2)$ , ta có:  $\frac{x-2}{\sqrt{x^2-4x+4}} = \frac{x-2}{|x-2|} = \frac{x-2}{-(x-2)} = -1$

Nếu  $x > 2$  thì  $|x-2| = x-2$ , ta có:  $\frac{x-2}{\sqrt{x^2-4x+4}} = \frac{x-2}{|x-2|} = \frac{x-2}{x-2} = 1$

**Bài 13:** Thực hiện phép tính:

$$\begin{aligned} \text{a) Biểu thức } & \frac{1}{3+\sqrt{2}} + \frac{1}{3-\sqrt{2}} = \frac{3-\sqrt{2}+3+\sqrt{2}}{(3-\sqrt{2})(3+\sqrt{2})} \\ & = \frac{6}{3^2 - (\sqrt{2})^2} = \frac{6}{9-2} = \frac{6}{7} \end{aligned}$$

Vậy biểu thức có giá trị là:  $\frac{6}{7}$

$$\begin{aligned} \text{b) Biểu thức } & \frac{2}{3\sqrt{2}-4} - \frac{2}{3\sqrt{2}+4} = \frac{2(3\sqrt{2}+4) - 2(3\sqrt{2}-4)}{(3\sqrt{2}+4)(3\sqrt{2}-4)} \\ & = \frac{6\sqrt{2}+8-6\sqrt{2}+8}{(3\sqrt{2})^2 - 4^2} = \frac{16}{18-16} = 8 \end{aligned}$$

Vậy biểu thức có giá trị là: 8

$$\begin{aligned} \text{c) Biểu thức } & \frac{\sqrt{5}-\sqrt{3}}{\sqrt{5}+\sqrt{3}} + \frac{\sqrt{5}+\sqrt{3}}{\sqrt{5}-\sqrt{3}} = \frac{(\sqrt{5}-\sqrt{3})^2 + (\sqrt{5}+\sqrt{3})^2}{(\sqrt{5}+\sqrt{3})(\sqrt{5}-\sqrt{3})} \\ & = \frac{5-2\sqrt{15}+3+5+2\sqrt{15}+3}{(\sqrt{5})^2 - (\sqrt{3})^2} = \frac{16}{5-3} = \frac{16}{2} = 8 \end{aligned}$$

Vậy biểu thức có giá trị là: 8

$$\begin{aligned} \text{d) Biểu thức } & \frac{3}{2\sqrt{2}-3\sqrt{3}} - \frac{3}{2\sqrt{2}+3\sqrt{3}} = 3 \cdot \left( \frac{2\sqrt{2}+3\sqrt{3} - (2\sqrt{2}-3\sqrt{3})}{(2\sqrt{2}-3\sqrt{3})(2\sqrt{2}+3\sqrt{3})} \right) \\ & = 3 \cdot \left( \frac{6\sqrt{3}}{(2\sqrt{2})^2 - (3\sqrt{3})^2} \right) = 3 \cdot \left( \frac{6\sqrt{3}}{8-27} \right) = -\frac{18\sqrt{3}}{19} \end{aligned}$$

Vậy biểu thức có giá trị là:  $-\frac{18\sqrt{3}}{19}$

**Bài 14:** Giải các phương trình:

a) Điều kiện:  $x \geq \frac{1}{2}$

Biến đổi phương trình về dạng:  $\sqrt{2x-1} = \sqrt{2}-1 \Rightarrow 2x-1 = (\sqrt{2}-1)^2$

$$\Leftrightarrow 2x-1 = 3-2\sqrt{2}$$

$$\Leftrightarrow x = 2 - \sqrt{2} \quad (\text{thỏa mãn điều kiện})$$

Vậy nghiệm của phương trình là:  $x = 2 - \sqrt{2}$

b) Điều kiện:  $x \geq \frac{-11}{3}$

Biến đổi phương trình về dạng:  $\sqrt{3x+11} = 3 + \sqrt{2} \Rightarrow 3x+11 = (3 + \sqrt{2})^2$

$\Leftrightarrow 3x+11 = 11 + 6\sqrt{2} \Leftrightarrow x = 2\sqrt{2}$  (thỏa mãn điều kiện)

Vậy nghiệm của phương trình là:  $x = 2\sqrt{2}$

c) Điều kiện:  $x \geq -5$

Ta có: với mọi giá trị của  $x \geq -5$  thì  $VT = \sqrt{x+5} \geq 0, VP = \sqrt{3} - 2 < 0$

Suy ra, phương trình  $\sqrt{x+5} = \sqrt{3} - 2$  vô nghiệm.

d) Điều kiện:  $x \geq -38$

Biến đổi phương trình về dạng:  $\sqrt{x+38} = 3 + \sqrt{5} \Leftrightarrow x+38 = (3 + \sqrt{5})^2$

$\Leftrightarrow x+38 = 14 + 6\sqrt{5} \Leftrightarrow x = -24 + 6\sqrt{5}$  (thỏa mãn điều kiện)

Vậy nghiệm của phương trình là:  $x = -24 + 6\sqrt{5}$

**Bài 15:** Tính giá trị của các biểu thức sau:

a) Biểu thức 
$$\frac{(1 + \sqrt{x})^2 - 4\sqrt{x}}{1 - \sqrt{x}} = \frac{1 + 2\sqrt{x} + (\sqrt{x})^2 - 4\sqrt{x}}{1 - \sqrt{x}}$$

$$= \frac{1 - 2\sqrt{x} + (\sqrt{x})^2}{1 - \sqrt{x}} = \frac{(1 - \sqrt{x})^2}{1 - \sqrt{x}} = 1 - \sqrt{x}$$

Với  $x = 2$ , thay vào biểu thức đã rút gọn ta được:  $1 - \sqrt{x} = 1 - \sqrt{2}$

Vậy biểu thức có giá trị là  $1 - \sqrt{2}$  khi  $x = 2$

b) Biểu thức 
$$\frac{(\sqrt{x} - \sqrt{y})^2 + 4\sqrt{xy}}{1 + \sqrt{xy}} = \frac{(\sqrt{x})^2 - 2\sqrt{xy}(\sqrt{y})^2 + 4\sqrt{xy}}{1 + \sqrt{xy}}$$

$$= \frac{(\sqrt{x})^2 + 2\sqrt{xy}(\sqrt{y})^2}{1 + \sqrt{xy}} = \frac{(\sqrt{x} + \sqrt{y})^2}{1 + \sqrt{xy}}$$

Với  $\begin{cases} x = 2 \\ y = 1 \end{cases}$ , thay vào biểu thức đã rút gọn ta được:  $\frac{(\sqrt{x} + \sqrt{y})^2}{1 + \sqrt{xy}} = \frac{(\sqrt{2} + 1)^2}{1 + \sqrt{2}} = 1 + \sqrt{2}$

Vậy biểu thức có giá trị là  $1 + \sqrt{2}$  khi  $\begin{cases} x = 2 \\ y = 1 \end{cases}$

c) Biểu thức 
$$\frac{x+y}{y} \cdot \sqrt{\frac{x^3y^2 + 2x^2y^3 + xy^4}{x^2 + 2xy + y^2}}$$

$$= \frac{x+y}{y} \cdot \sqrt{\frac{xy^2(x^2 + 2xy + y^2)}{x^2 + 2xy + y^2}} = \frac{x+y}{y} \cdot y\sqrt{x} = \sqrt{x}(x+y)$$

Với  $\begin{cases} x = 2 \\ y = 1 \end{cases}$ , thay vào biểu thức đã rút gọn ta được:  $\sqrt{x}(x+y) = \sqrt{2}(2+1) = 3\sqrt{2}$

Vậy biểu thức có giá trị là  $3\sqrt{2}$  khi  $\begin{cases} x = 2 \\ y = 1 \end{cases}$

----- **Toán Học Sơ Đò** -----