

**Bài 1:**

Cho biểu thức

$$A = \frac{8-x}{2+\sqrt[3]{x}} : \left( 2 + \frac{\sqrt[3]{x^2}}{2+\sqrt[3]{x}} \right) + \left( \sqrt[3]{x} + \frac{2\sqrt[3]{x}}{\sqrt[3]{x}-2} \right) \cdot \frac{\sqrt[3]{x^2}-4}{\sqrt[3]{x^2}+2\sqrt[3]{x}} \quad (x \neq 8; x \neq -8; x \neq 0)$$

Chứng minh A không phụ thuộc biến số

**H- ướng dẫn**

Cho biểu thức

$$A = \frac{8-x}{2+\sqrt[3]{x}} : \left( 2 + \frac{\sqrt[3]{x^2}}{2+\sqrt[3]{x}} \right) + \left( \sqrt[3]{x} + \frac{2\sqrt[3]{x}}{\sqrt[3]{x}-2} \right) \cdot \frac{\sqrt[3]{x^2}-4}{\sqrt[3]{x^2}+2\sqrt[3]{x}} \quad (x \neq 8; x \neq -8; x \neq 0)$$

Chứng minh A không phụ thuộc biến số

$$A = \frac{(2-\sqrt[3]{x})(4+2\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{x^2})}{2+\sqrt[3]{x}} : \left( \frac{4+2\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{x^2}}{2+\sqrt[3]{x}} \right) + \left( \frac{\sqrt[3]{x^2}-2\sqrt[3]{x}+2\sqrt[3]{x}}{\sqrt[3]{x}-2} \right) \cdot \frac{(\sqrt[3]{x}-2)(\sqrt[3]{x}+2)}{\sqrt[3]{x}(\sqrt[3]{x}+2)}$$

$$A = \frac{(2-\sqrt[3]{x})(4+2\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{x^2})}{2+\sqrt[3]{x}} \cdot \frac{2+\sqrt[3]{x}}{4+2\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{x^2}} + \left( \frac{\sqrt[3]{x^2}-2\sqrt[3]{x}+2\sqrt[3]{x}}{\sqrt[3]{x}-2} \right) \cdot \frac{(\sqrt[3]{x}-2)(\sqrt[3]{x}+2)}{\sqrt[3]{x}(\sqrt[3]{x}+2)}$$

$$A = 2 - \sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{x} = 2 \notin x$$

**Bài 2:**

Cho biểu thức

$$A = \left[ \left( \frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{1}{\sqrt{y}} \right) \frac{2}{\sqrt{x}+\sqrt{y}} + \frac{1}{x} + \frac{1}{y} \right] : \frac{\sqrt{x^3} + y\sqrt{x} + x\sqrt{y} + \sqrt{y^3}}{\sqrt{xy^3} + \sqrt{x^3y}}$$

1) Rút gọn A

$$2) \text{ Tìm } x; y \text{ biết } xy = \frac{1}{36}; A = 5$$

**Hướng dẫn:**

1)

$$A = \left[ \frac{\sqrt{x}+\sqrt{y}}{\sqrt{xy}} \cdot \frac{2}{\sqrt{x}+\sqrt{y}} + \frac{x+y}{xy} \right] : \frac{(\sqrt{x}+\sqrt{y})(x-\sqrt{xy}+y) + \sqrt{xy}(\sqrt{x}+\sqrt{y})}{\sqrt{xy}(x+y)}$$

$$A = \frac{(\sqrt{x}+\sqrt{y})^2}{xy} \cdot \frac{\sqrt{xy}(x+y)}{(\sqrt{x}+\sqrt{y})(x+y)} = \frac{\sqrt{x}+\sqrt{y}}{\sqrt{xy}}$$

$$2) A = 5 \Leftrightarrow \sqrt{x}+\sqrt{y} = 5\sqrt{xy} \Leftrightarrow \sqrt{x}+\sqrt{y} = \frac{5}{6} \text{ theo GT } \sqrt{xy} = \frac{1}{6}$$

theo Viet đảo  $\sqrt{x}; \sqrt{y}$  là nghiệm dương của phương trình bậc 2

$$t^2 - \frac{5}{6}t + \frac{1}{6} = 0 \Leftrightarrow 6t^2 - 5t + 1 = 0 \quad \Delta = 1 \Rightarrow t_1 = \frac{1}{2}; t_2 = \frac{1}{3}$$

$$\text{vậy } (x; y) = \left(\frac{1}{4}; \frac{1}{3}\right); \left(\frac{1}{3}; \frac{1}{4}\right)$$

### **Bài 3:**

1. Rút gọn biểu thức A
2. Tìm tất các giá trị nguyên của x để biểu thức A có giá trị nguyên

#### **H- ướng dẫn**

1. ĐKXĐ :  $x \neq -26; x \neq -6; x \neq -3; x \neq 1; x \neq 2;$

$$A = \left[ \frac{3}{2} - \left( \frac{x^6 + x^4 - x^4 - 1}{x^2 + 1} \right) \cdot \left( \frac{x^3 - 4x^2 + x - 4}{x^6(x+6) - (x+6)} \right) \right] : \left( \frac{x^2 + 3x + 26x + 78}{3(x^2 - 2x + 6x - 12)} \right)$$

$$A = \left[ \frac{3}{2} - \left( \frac{x^6 - 1}{x^2 + 1} \right) \cdot \left( \frac{(x-4)(x^2+1)}{(x+6)(x^6-1)} \right) \right] : \left( \frac{(x+3)(x+26)}{3(x-2)(x+6)} \right)$$

$$A = \left[ \frac{3}{2} - \frac{x-4}{x+6} \right] \cdot \frac{3(x-2)(x+6)}{(x+3)(x+26)} = \frac{3x+18-2x+8}{2(x+6)} \cdot \frac{3(x-2)(x+6)}{(x+3)(x+26)}$$

$$A = \frac{3x+18-2x+8}{2(x+6)} \cdot \frac{3(x-2)(x+6)}{(x+3)(x+26)} = \frac{x+26}{2(x+6)} \cdot \frac{3(x-2)(x+6)}{(x+3)(x+26)} = \frac{3(x-2)}{2(x+3)}$$

$$2. A = \frac{3(x-2)}{2(x+3)}$$

Vì  $A \in \mathbb{Z}$  nên  $2A \in \mathbb{Z}$ .

$$\text{Xét } 2A = \frac{3(x-2)}{x+3} = \frac{3(x+3)-15}{x+3} = 3 - \frac{15}{x+3} \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow x+3 \in U(15)$$

x+3	-15	-5	-3	-1	1	3	5	15
x	-18	-8	-6	-4	-2	0	2(loại)	12
2A	4	6	8	18	-12	-2	0	2
A	2	3	4	9	-6 ( loại)	-1	0	1

Vậy  $x \in \{-18; -8; -4; -2; 0; 12\}$  thì A nguyên

### **Bài 4:** Cho biểu thức

$$A = \left( \frac{x-y}{2y-x} + \frac{x^2+y^2+y-2}{2y^2+xy-x^2} \right) : \frac{4x^4+4x^2y+y^2-4}{x^2+y+xy+x}$$

Với  $x > 0; y > 0; x \neq 2y; y \neq 2-2x^2$

1. Rút gọn biểu thức A

2. Cho  $y=1$  hãy tìm x để  $A = \frac{2}{5}$

#### **Hướng dẫn :**

$$1. A = \left( \frac{x-y}{2y-x} + \frac{x^2+y^2+y-2}{2y^2+xy-x^2} \right) : \frac{4x^4+4x^2y+y^2-4}{x^2+y+xy+x}$$

$$A = \left( \frac{x-y}{2y-x} + \frac{x^2+y^2+y-2}{(x+y)(2y-x)} \right) \cdot \frac{(x+y)(x+1)}{(2x^2+y-2)(2x^2+y+2)}$$

$$A = \frac{2x^2+y-2}{(x+y)(2y-x)} \cdot \frac{(x+y)(x+1)}{(2x^2+y-2)(2x^2+y+2)} = \frac{x+1}{(2y-x)(2x^2+y+2)}$$

2. với  $y=1$  ta có

$$A = \frac{x+1}{(2-x)(2x^2+3)} = \frac{2}{5} \Leftrightarrow 4x^3 - 8x^2 + 11x - 7 = 0$$

$$\Leftrightarrow (x-1)(4x^2 - 4x + 7) = 0 \Leftrightarrow x = 1$$

**Bài 5 :** Cho biểu thức :  $P = \left( \frac{\sqrt{a-b}}{\sqrt{a+b}-\sqrt{a-b}} + \frac{a-b}{\sqrt{a^2-b^2}-a+b} \right) \cdot \frac{a^2+b^2}{\sqrt{a^2-b^2}}, a, b > 0$

A, Rút gọn P=?

B, Biết  $a-b=1$  tìm GTNN

a)  $P = \frac{a^2+b^2}{b}$

b) Với  $a-b=1 \Rightarrow a=1+b \Rightarrow P = \frac{(b+1)^2+b^2}{b} = \frac{2b^2+2b+1}{b} = 2b + \frac{1}{b} + 2 \geq 2\sqrt{2} + 2$

$\Rightarrow$  GTNN  $P = 2\sqrt{2} + 2 \Leftrightarrow 2b = \frac{1}{b} \Leftrightarrow b = \frac{\sqrt{2}}{2}$  và  $a = \frac{\sqrt{2}}{2} + 1$

**Bài 5 :**

Cho biểu thức  $D = \left( \frac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{1-\sqrt{ab}} + \frac{\sqrt{a}-\sqrt{b}}{1+\sqrt{ab}} \right) : \left( 1 + \frac{a+b+2ab}{1-ab} \right)$  với  $a > 0, b > 0, ab \neq 1$

a) Rút gọn D.

b) Tính giá trị của D với  $a = \frac{2}{2-\sqrt{3}}$

**Rút gọn D :** Biểu thức  $D = \left( \frac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{1-\sqrt{ab}} + \frac{\sqrt{a}-\sqrt{b}}{1+\sqrt{ab}} \right) : \left( 1 + \frac{a+b+2ab}{1-ab} \right)$

Với ĐK :  $a > 0, b > 0, ab \neq 1$  Biểu thức D có nghĩa

$$\begin{aligned}
 D &= \frac{(\sqrt{a} + \sqrt{b})(1 + \sqrt{ab}) + (\sqrt{a} - \sqrt{b})(1 - \sqrt{ab})}{1 - ab} : \frac{1 - ab + a + b + 2ab}{1 - ab} \\
 &= \frac{2\sqrt{a} + 2b\sqrt{a}}{1 - ab} : \frac{1 + ab + a + b}{1 - ab} = \frac{2\sqrt{a}(1 + b)}{1 - ab} : \frac{(1 + a)(1 + b)}{1 - ab} \\
 &= \frac{2\sqrt{a}(1 + b)}{1 - ab} \cdot \frac{1 - ab}{(1 + a)(1 + b)} = \frac{2\sqrt{a}}{1 + a}
 \end{aligned}$$

$$b) a = \frac{2}{2 - \sqrt{3}} = 4 + 2\sqrt{3} = 3 + 2\sqrt{3} + 1 = (\sqrt{3} + 1)^2$$

$$\begin{aligned}
 \Rightarrow D &= \frac{2\sqrt{(\sqrt{3} + 1)^2}}{5 + 2\sqrt{3}} = \frac{2|\sqrt{3} + 1|}{5 + 2\sqrt{3}} = \frac{2(\sqrt{3} + 1)}{5 + 2\sqrt{3}} = \frac{(2\sqrt{3} + 2)(5 - 2\sqrt{3})}{13} = \frac{6\sqrt{3} - 2}{13} = \frac{2(3\sqrt{3} - 1)}{13} \quad (\text{Vì} \\
 &\sqrt{3} + 1 > 0)
 \end{aligned}$$

**Bài 6:** Cho biểu thức

$$A = \left[ 1 : \left( 1 - \frac{\sqrt{a}}{1 + \sqrt{a}} \right) \right] \left[ \frac{1}{\sqrt{a} - 1} - \frac{2\sqrt{a}}{(a + 1)(\sqrt{a} - 1)} \right]$$

- a) Tìm điều kiện của a để A có nghĩa.  
 b) Rút gọn biểu thức A.  
 c) với giá trị nào của a thì A có giá trị nguyên.

Giải :

$$\text{Ta có: } A = \left[ 1 : \left( 1 - \frac{\sqrt{a}}{1 + \sqrt{a}} \right) \right] \left[ \frac{1}{\sqrt{a} - 1} - \frac{2\sqrt{a}}{(a + 1)(\sqrt{a} - 1)} \right]$$

$$A = \left( 1 : \frac{1 + \sqrt{a} - \sqrt{a}}{1 + \sqrt{a}} \right) \cdot \frac{a + 1 - 2\sqrt{a}}{(a + 1)(\sqrt{a} - 1)}$$

$$A = \left( 1 : \frac{1}{1 + \sqrt{a}} \right) \cdot \frac{(\sqrt{a} - 1)^2}{(a + 1)(\sqrt{a} - 1)}$$

a) Biểu thức A có nghĩa khi:  $\begin{cases} a \geq 0 \\ 1 + \sqrt{a} \neq 0 \\ a + 1 \neq 0 \\ \sqrt{a} - 1 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a \geq 0 \\ \sqrt{a} \neq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a \geq 0 \\ a \neq 1 \end{cases} (*)$

b) Với điều kiện (\*), ta có:

$$A = \left( 1 : \frac{1}{1 + \sqrt{a}} \right) \cdot \frac{(\sqrt{a} - 1)^2}{(a + 1)(\sqrt{a} - 1)}$$

$$A = \frac{(1 + \sqrt{a})(\sqrt{a} - 1)^2}{(a + 1)(\sqrt{a} - 1)} = \frac{a - 1}{a + 1}$$

c) Ta có:

$$A = 1 - \frac{2}{a+1}$$

Biểu thức A có giá trị nguyên khi:

$$2 \mid (a+1)$$

$$\text{hay } a+1 = \{1; -1; 2; -2\} \Rightarrow a = \{0; -2; 1; -3\}$$

Kết hợp với điều kiện (\*)  $\Rightarrow a = 0$

**Bài 7:** . Cho biểu thức:

$$P = \frac{x\sqrt{x} - 3}{x - 2\sqrt{x} - 3} - \frac{2(\sqrt{x} - 3)}{\sqrt{x} + 1} + \frac{\sqrt{x} + 3}{3 - \sqrt{x}}$$

- Rút gọn biểu thức P.
- Tính giá trị của P với  $x = 14 - 6\sqrt{5}$
- Tìm GTNN của P.

**Giải**

Điều kiện để giá trị của biểu thức P xác định :  $x \geq 0; x \neq 9$

a) Rút gọn:

$$\begin{aligned} P &= \frac{x\sqrt{x} - 3}{(\sqrt{x} + 1)(\sqrt{x} - 3)} - \frac{2(\sqrt{x} - 3)}{\sqrt{x} + 1} - \frac{\sqrt{x} + 3}{\sqrt{x} - 3} \\ &= \frac{x\sqrt{x} - 3 - 2(\sqrt{x} - 3)^2 - (\sqrt{x} + 3)(\sqrt{x} + 1)}{(\sqrt{x} - 3)(\sqrt{x} + 1)} \\ &= \frac{x\sqrt{x} - 3 - 2x + 12\sqrt{x} - 18 - x - 3\sqrt{x} - \sqrt{x} - 3}{(\sqrt{x} - 3)(\sqrt{x} + 1)} \\ &= \frac{x\sqrt{x} - 3x + 8\sqrt{x} - 24}{(\sqrt{x} - 3)(\sqrt{x} + 1)} = \frac{\sqrt{x}(x + 8) - 3(x + 8)}{(\sqrt{x} - 3)(\sqrt{x} + 1)} = \frac{x + 8}{\sqrt{x} + 1} \end{aligned}$$

$$\text{b) } x = 14 - 6\sqrt{5} = (\sqrt{5})^2 - 2 \cdot 3 \cdot \sqrt{5} + 9 = (\sqrt{5} - 3)^2 \Rightarrow \sqrt{x} = 3 - \sqrt{5}$$

$$\text{Khi đó } P = \frac{14 - 6\sqrt{5} + 8}{3 - \sqrt{5} + 1} = \frac{22 - 6\sqrt{5}}{4 - \sqrt{5}} = \frac{58 - 2\sqrt{5}}{11}$$

$$\text{Vậy với } x = 14 - 6\sqrt{5} \text{ thì } P = \frac{58 - 2\sqrt{5}}{11}$$

c)

$$P = \frac{x + 8}{\sqrt{x} + 1} = \frac{x - 1 + 9}{\sqrt{x} + 1} = \sqrt{x} - 1 + \frac{9}{\sqrt{x} + 1} = \sqrt{x} + 1 + \frac{9}{\sqrt{x} + 1} - 2 \geq 2\sqrt{9} - 2 = 4$$

$$\left( \text{áp dụng BĐT CôSi cho 2 số d-ong } \sqrt{x} + 1; \frac{9}{\sqrt{x} + 1} \right)$$

$$\text{Dấu "=" xảy ra } \Leftrightarrow \sqrt{x} + 1 = \frac{9}{\sqrt{x} + 1} \Leftrightarrow x = 4 \text{ (thỏa mãn điều kiện)}$$

Vậy  $\min P = 4$ , đạt đ-ợc khi  $x = 4$ .

**Bài 8:** Cho  $A = \frac{\sqrt{x} + 2}{\sqrt{x} + 3} - \frac{5}{x + \sqrt{x} - 6} + \frac{1}{2 - \sqrt{x}}$

a) Rút gọn A

b) Tìm x để A có giá trị nguyên

$$. a) \text{ đk } x \geq 0; x \neq 4 \quad A = \frac{(\sqrt{x}+2)(\sqrt{x}-2)-5-(\sqrt{x}+3)}{(\sqrt{x}+3)(\sqrt{x}-2)} = \frac{\sqrt{x}-4}{\sqrt{x}-2} \quad (2đ)$$

$$b) A = \frac{\sqrt{x}-4}{\sqrt{x}-2} = 1 - \frac{2}{\sqrt{x}-2} \text{ nguyên khi } 2 : (\sqrt{x}-2) \Rightarrow x = 0; 1; 9; 16 \quad (2đ)$$

### **Bài 9 :**

Cho biểu thức sau:

$$P = \frac{x^2 - \sqrt{x}}{x + \sqrt{x} + 1} - \frac{2x + \sqrt{x}}{\sqrt{x}} + \frac{2(x-1)}{\sqrt{x}-1}$$

1. Rút gọn P.

2. Tìm giá trị nhỏ nhất của P.

3. Tìm x để biểu thức  $Q = \frac{2\sqrt{x}}{P}$  nhận giá trị là số nguyên

Điều kiện:  $0 < x \neq 1$

$$P = \frac{\sqrt{x}(\sqrt{x}-1)(x+\sqrt{x}+1)}{x+\sqrt{x}+1} - (2\sqrt{x}+1) + 2(\sqrt{x}+1)$$

$$P = x - \sqrt{x} + 1$$

$$P = \left( \sqrt{x}^2 - 2\sqrt{x} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{4} \right) + \frac{3}{4} = \left( \sqrt{x} - \frac{1}{2} \right)^2 + \frac{3}{4} \geq \frac{3}{4} \text{ với mọi } x \text{ thoả mãn điều kiện xác định}$$

$$\Rightarrow \min P = \frac{3}{4} \Leftrightarrow \sqrt{x} - \frac{1}{2} = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{4}$$

$$Q = \frac{2\sqrt{x}}{P} = \frac{2\sqrt{x}}{x - \sqrt{x} + 1} = \frac{2}{\sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}} - 1} = \frac{2}{M}$$

Với  $0 < x \neq 1 \Rightarrow \sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}} > 2 \Rightarrow M > 1 \Rightarrow 0 < Q < 2$ . vì Q nguyên

$$\Rightarrow Q = 1 \Rightarrow \frac{2\sqrt{x}}{x - \sqrt{x} + 1} = 1$$

$$x - 3\sqrt{x} + 1 = 0 \Rightarrow x = \frac{7+3\sqrt{5}}{2}; x = \frac{7-3\sqrt{5}}{2}$$

Kết luận: với  $x = \frac{7 \pm 3\sqrt{5}}{2}$  thì  $Q \in Z$

### **Bài 10 :**

Cho biểu thức

$$A = \left( \frac{\sqrt{x} + \sqrt{y}}{1 - \sqrt{xy}} + \frac{\sqrt{x} - \sqrt{y}}{1 + \sqrt{xy}} \right) : \left( 1 + \frac{x+y+2xy}{1-xy} \right)$$

a, Rút gọn A

b, Tính giá trị của A khi  $x = \frac{2}{2 + \sqrt{3}}$

c, Tìm giá trị lớn nhất của A.

Giải :a,

Điều kiện để A có nghĩa là  $x \geq 0; y \geq 0; xy \neq 1$

$$\begin{aligned} \text{Ta có : } A &= \left( \frac{\sqrt{x} + \sqrt{y}}{1 - \sqrt{xy}} + \frac{\sqrt{x} - \sqrt{y}}{1 + \sqrt{xy}} \right) : \left( 1 + \frac{x + y + 2xy}{1 - xy} \right) \\ &= \frac{(\sqrt{x} + \sqrt{y})(1 + \sqrt{xy}) + (\sqrt{x} - \sqrt{y})(1 - \sqrt{xy})}{1 - xy} : \frac{1 + x + y + xy}{1 - xy} \\ &= \frac{\sqrt{x} + x\sqrt{y} + \sqrt{y} + y\sqrt{x} + \sqrt{x} - x\sqrt{y} - \sqrt{y} + y\sqrt{x}}{1 - xy} : \frac{1 + x + y + xy}{1 - xy} \\ &= \frac{2\sqrt{x} + 2y\sqrt{x}}{1 - xy} \cdot \frac{1 - xy}{(1 + x)(1 + y)} = \frac{2\sqrt{x}(1 + y)}{(1 + x)(1 + y)} = \frac{2\sqrt{x}}{1 + x} \end{aligned}$$

b, Ta có :  $x = \frac{2}{2 + \sqrt{3}}$  thỏa mãn điều kiện  $x \geq 0$

$$x = \frac{2(2 - \sqrt{3})}{(2 + \sqrt{3})(2 - \sqrt{3})} = 4 - 2\sqrt{3} = (\sqrt{3} - 1)^2$$

Thay x vào A ta có:

$$\begin{aligned} A &= \frac{2\sqrt{(\sqrt{3} - 1)^2}}{4 - 2\sqrt{3} + 1} = \frac{2|\sqrt{3} - 1|}{5 - 2\sqrt{3}} = \frac{2(\sqrt{3} - 1)(5 + 2\sqrt{3})}{(5 - 2\sqrt{3})(5 + 2\sqrt{3})} \\ &= \frac{2(5\sqrt{3} + 6 - 5 - 2\sqrt{3})}{5^2 - (2\sqrt{3})^2} = \frac{2(3\sqrt{3} + 1)}{25 - 12} = \frac{2(3\sqrt{3} + 1)}{13} \end{aligned}$$

c, Với mọi  $x \geq 0$  ta có  $(\sqrt{x} - 1)^2 \geq 0$

$$\Leftrightarrow x - 2\sqrt{x} + 1 \geq 0 \Leftrightarrow x + 1 \geq 2\sqrt{x}$$

$$\Leftrightarrow 1 \geq \frac{2\sqrt{x}}{1 + x} \quad (\text{vì } x + 1 > 0) \Leftrightarrow \frac{2\sqrt{x}}{1 + x} \leq 1 \Leftrightarrow A \leq 1$$

Vậy giá trị lớn nhất của P = 1 khi  $\sqrt{x} - 1 = 0 \Leftrightarrow x = 1$

Bài 11:

$$\text{Cho biểu thức: } A = \left( \frac{x + 2}{x\sqrt{x} - 1} + \frac{\sqrt{x}}{x + \sqrt{x} + 1} + \frac{1}{1 - \sqrt{x}} \right) : \frac{\sqrt{x} - 1}{2}$$

Với  $x > 0$  và  $x \neq 1$

a) Rút gọn biểu thức A

b) Chứng minh rằng:  $0 < A < 2$

a.

$$A = \left( \frac{x+2}{\sqrt{x^3-1}} + \frac{\sqrt{x}}{x+\sqrt{x}+1} - \frac{1}{\sqrt{x}-1} \right) : \frac{\sqrt{x}-1}{2}$$

$$A = \left( \frac{x+2}{(\sqrt{x}-1)(x+\sqrt{x}+1)} + \frac{\sqrt{x}}{x+\sqrt{x}+1} - \frac{1}{\sqrt{x}-1} \right)$$

$$A = \frac{x+2+\sqrt{x}(\sqrt{x}-1)-(x+\sqrt{x}+1)}{(\sqrt{x}-1)(x+\sqrt{x}+1)} \cdot \frac{2}{\sqrt{x}-1} = \frac{2(\sqrt{x}-1)^2}{(\sqrt{x}-1)^2(x+\sqrt{x}+1)} = \frac{2}{x+\sqrt{x}+1}$$

b.

Vì  $x > 0$  nên  $x + \sqrt{x} + 1 > 1$

$$\text{Mà } A = \frac{2}{x+\sqrt{x}+1} \Rightarrow A > 0 \quad (1)$$

$$\text{Vì } x > 0 \Rightarrow x + \sqrt{x} + 1 > 1 \Rightarrow \frac{2}{x+\sqrt{x}+1} < 2 \text{ tức } A < 2 \quad (2)$$

Từ (1) và (2) ta có:  $0 < A < 2$

**Bài 12:** Cho biểu thức:

$$P = \frac{x\sqrt{x}-3}{x-2\sqrt{x}-3} - \frac{2(\sqrt{x}-3)}{\sqrt{x}+1} + \frac{\sqrt{x}+3}{3-\sqrt{x}}$$

1) Rút gọn biểu thức P

2) Tính giá trị của P với  $x = 14 - 6\sqrt{5}$

3) Tìm giá trị nhỏ nhất của P

1) Điều kiện để giá trị biểu thức P xác định:  $x \geq 0$ ;  $x \neq 9$

Rút gọn:

$$\begin{aligned} P &= \frac{x\sqrt{x}-3}{(\sqrt{x}+1)(\sqrt{x}-3)} - \frac{2(\sqrt{x}-3)}{\sqrt{x}+1} - \frac{\sqrt{x}+3}{\sqrt{x}-3} \\ &= \frac{x\sqrt{x}-3-2(\sqrt{x}-3)^2-(\sqrt{x}+3)(\sqrt{x}+1)}{(\sqrt{x}-3)(\sqrt{x}+1)} \\ &= \frac{x\sqrt{x}-3-2x+12\sqrt{x}-18-x-3\sqrt{x}-\sqrt{x}-3}{(\sqrt{x}-3)(\sqrt{x}+1)} \\ &= \frac{x\sqrt{x}-3x+8\sqrt{x}-24}{(\sqrt{x}-3)(\sqrt{x}+1)} = \frac{\sqrt{x}(x+8)-x(x+8)}{(\sqrt{x}-3)(\sqrt{x}+1)} = \frac{x+8}{\sqrt{x}+1} \end{aligned}$$

$$2) x = 14 - 6\sqrt{5} = \dots = (\sqrt{5} - 3)^2 \Rightarrow x = 3 - \sqrt{5}$$

$$\text{Khi đó } P = \frac{14-6\sqrt{5}+8}{3-\sqrt{5}+1} = \frac{22-6\sqrt{5}}{4-\sqrt{5}} = \frac{58-2\sqrt{5}}{11}$$

$$3) P = \frac{x+8}{\sqrt{x+1}} = \frac{x-1+9}{\sqrt{x+1}} = \sqrt{x-1} + \frac{9}{\sqrt{x+1}} = \sqrt{x+1} + \frac{9}{\sqrt{x+1}} - 2 \geq 2\sqrt{9} - 2 = 4$$

( áp dụng BĐT Côsi cho hai số d- ơng  $\sqrt{x+1}$ ;  $\frac{9}{\sqrt{x+1}}$  )

Dấu " = " xảy ra  $\Leftrightarrow \sqrt{x+1} = \frac{9}{\sqrt{x+1}} \Leftrightarrow x = 4$  thoả mãn đk

Vậy min P = 4 khi x = 4

**Bài 13:** Cho biểu thức:  $A = \frac{x}{x-4} + \frac{1}{\sqrt{x-2}} + \frac{1}{\sqrt{x+2}}$

a). Tìm điều kiện của x để biểu thức A xác định.

b). Rút gọn biểu thức A.

c). Tính giá trị của A khi x = 25.

d). Tìm các giá trị của x để  $A = -\frac{1}{3}$

**Giải:**

a). (1 điểm) Biểu thức A đ- ợc xác định :

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x} \text{ Xac dinh} \\ x-4 \neq 0 \\ \sqrt{x}-2 \neq 0 \end{cases} \quad (0,5 \text{ diem}) \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ x \neq 4 \\ x \neq 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ x \neq 4 \end{cases}$$

b). : Rút gọn biểu thức A

$$\begin{aligned} A &= \frac{x}{x-4} + \frac{1}{\sqrt{x-2}} + \frac{1}{\sqrt{x+2}} \\ &= \frac{x}{(\sqrt{x-2})(\sqrt{x+2})} + \frac{\sqrt{x+2}}{(\sqrt{x-2})(\sqrt{x+2})} + \frac{\sqrt{x-2}}{(\sqrt{x-2})(\sqrt{x+2})} \\ &= \frac{x + \sqrt{x} + 2 + \sqrt{x} - 2}{(\sqrt{x-2})(\sqrt{x+2})} = \frac{\sqrt{x}(\sqrt{x+2})}{(\sqrt{x-2})(\sqrt{x+2})} = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x-2}} \end{aligned}$$

c). : Khi x = 25 thì  $A = \frac{\sqrt{25}}{\sqrt{25-2}} = \frac{5}{3}$

d). :  $A = -\frac{1}{3} \Leftrightarrow \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x-2}} = -\frac{1}{3}$

$$\Leftrightarrow 3\sqrt{x} = -\sqrt{x} + 2 \Leftrightarrow 4\sqrt{x} = 2 \Leftrightarrow \sqrt{x} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow x = \frac{1}{4} \quad (\text{T/m điều kiện})$$

Vậy với  $x = \frac{1}{4}$  thì  $A = -\frac{1}{3}$ .

**Bài 14:** Cho biểu thức

$$A = \left( \frac{x\sqrt{x+1}}{x-1} - \frac{x-1}{\sqrt{x-1}} \right) : \left( \sqrt{x} + \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x-1}} \right)$$

a) Tìm ĐKXĐ của A. Rút gọn A

b) Tìm giá trị của x để A = 3

**Giải**

a) • ĐKXĐ:  $x > 0$  và  $x \neq 1$

$$\begin{aligned} \bullet \text{ Ta có: } A &= \left( \frac{x\sqrt{x}+1}{x-1} - \frac{x-1}{\sqrt{x}-1} \right) : \left( \sqrt{x} + \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1} \right) \\ &= \left( \frac{(\sqrt{x}+1)(x-\sqrt{x}+1)}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)} - \frac{x-1}{\sqrt{x}-1} \right) : \left( \frac{\sqrt{x}(\sqrt{x}-1)}{\sqrt{x}-1} + \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1} \right) \\ &= \left( \frac{x-\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1} - \frac{x-1}{\sqrt{x}-1} \right) : \left( \frac{x-\sqrt{x}+\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1} \right) = \frac{x-\sqrt{x}+1-x+1}{\sqrt{x}-1} : \frac{x}{\sqrt{x}-1} \\ &= \frac{-\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}-1} : \frac{x}{\sqrt{x}-1} = \frac{-\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}-1} \cdot \frac{\sqrt{x}-1}{x} = \frac{2-\sqrt{x}}{x} \end{aligned}$$

$$\text{b) } A = 3 \Rightarrow \frac{2-\sqrt{x}}{x} = 3 \Rightarrow 3x + \sqrt{x} - 2 = 0 \Rightarrow x = 2/3$$

Bài 15:

$$\text{Cho biểu thức } P = \frac{1}{\sqrt{x}+1} - \frac{3}{x\sqrt{x}+1} + \frac{2}{x-\sqrt{x}+1}$$

a) Rút gọn P

b) Tìm giá trị lớn nhất, nhỏ nhất của P

**Giải.** a) • Điều kiện  $x \geq 0$

$$P = \frac{1}{\sqrt{x}+1} - \frac{3}{(\sqrt{x}+1)(x-\sqrt{x}+1)} + \frac{2}{x-\sqrt{x}+1}$$

$$P = \frac{x-\sqrt{x}+1-3+2\sqrt{x}+2}{x\sqrt{x}+1}$$

$$P = \frac{\sqrt{x}(\sqrt{x}+1)}{x\sqrt{x}+1}$$

$$P = \frac{\sqrt{x}}{x-\sqrt{x}+1}$$

$$\text{b) } \bullet \text{ Ta có } \begin{cases} x-\sqrt{x}+1 = \left(\sqrt{x}-\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} > 0 \quad \forall x \geq 0 \\ \sqrt{x} \geq 0 \quad \forall x \geq 0 \end{cases}$$

nên  $P = \frac{\sqrt{x}}{x - \sqrt{x} + 1} \geq 0, \forall x \geq 0$

$P = 0 \Leftrightarrow x = 0$ . Vậy  $\min P = 0$

• Ta có  $(\sqrt{x} - 1)^2 \geq 0, \forall x \geq 0$

$\Leftrightarrow x - 2\sqrt{x} + 1 \geq 0$

$\Leftrightarrow x - \sqrt{x} + 1 \geq \sqrt{x}, \forall x \geq 0$

$\Leftrightarrow \frac{\sqrt{x}}{x - \sqrt{x} + 1} \leq 1, \forall x \geq 0$

$\Leftrightarrow P \leq 1 \forall x \geq 0; P = 1 \Leftrightarrow x = 1$ . Vậy  $\text{Max}P = 1$  khi  $x = 1$

Tóm lại:  $\min P = 0$  khi  $x = 0$ ;  $\text{Max}P = 1$  khi  $x = 1$

**Bài 16:** Cho biểu thức  $A = \left( \frac{x\sqrt{x}-1}{x-\sqrt{x}} - \frac{x\sqrt{x}+1}{x+\sqrt{x}} \right) : \frac{x+2}{x-2}$

a, Nêu điều kiện phải có của  $x$  và rút gọn biểu thức  $A$

b, Tìm những giá trị của  $x$  để  $A$  có giá trị nguyên

**Giải**

Câu a, Lập luận giải kết hợp để tìm điều kiện của  $A$ .

( $x > 0, x \neq 1, x \neq 2$ ) cho (0,5đ)

biến đổi biểu thức trong ngoặc:  $\frac{2x^2 - 2x}{x^2 - x}$

$$A = \frac{2x^2 - 2x}{x^2 - x} \cdot \frac{x-2}{x+2} = \frac{2x-4}{x+2}$$

Câu b,  $A = \frac{2x-4}{x+2} = \frac{2(x+2)-8}{x+2} = 2 - \frac{8}{x+2}$

Để  $A$  nguyên  $\Leftrightarrow \frac{8}{x+2}$  nguyên  $\Leftrightarrow 8 \mid (x+2)$  hay  $x+2$  là  $U_8$

Vì  $x > 0 \Rightarrow x+2 > 2$  Do đó  $x+2 = 4; x+2 = 8$

Tính  $x = 2$  hoặc  $x = 6$  vì  $x \neq 2$  nên  $x = 6$ . Thì  $A$  có giá trị nguyên.

**Bài 17:** Cho biểu thức  $B = \frac{2\sqrt{x}-9}{x-5\sqrt{x}+6} - \frac{\sqrt{x}+3}{\sqrt{x}-2} - \frac{2\sqrt{x}+1}{3-\sqrt{x}}$

a. Xác định  $x$  để  $B$  có nghĩa.

b. Rút gọn  $B$ .

c. Tìm  $x$  để  $B$  là số nguyên.

**Giải:**

a. Ta có:  $x - 5\sqrt{x} + 6 = (\sqrt{x} - 3)(\sqrt{x} - 2)$ .

Điều kiện: 
$$\begin{cases} x \geq 0 \\ \sqrt{x} \neq 3 \\ \sqrt{x} \neq 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ x \neq 9 \\ x \neq 4 \end{cases}$$

$$\begin{aligned}
 \text{b. } B &= \frac{2\sqrt{x}-9}{(\sqrt{x}-3)(\sqrt{x}-2)} - \frac{\sqrt{x}+3}{\sqrt{x}-2} + \frac{2\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-3} \\
 &= \frac{2\sqrt{x}-9 - (\sqrt{x}+3)(\sqrt{x}-3) + (2\sqrt{x}+1)(\sqrt{x}-2)}{(\sqrt{x}-3)(\sqrt{x}-2)} \\
 &= \frac{2\sqrt{x}-9 - x+9 + 2x - 4\sqrt{x} + \sqrt{x}-2}{(\sqrt{x}-3)(\sqrt{x}-2)} \\
 &= \frac{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+1)}{(\sqrt{x}-3)(\sqrt{x}-2)} = \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-3}
 \end{aligned}$$

c/ Vì  $B = \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-3} = 1 + \frac{4}{\sqrt{x}-3}$  Nên  $B \in \mathbb{Z}$  ( B nguyên) thì  $\sqrt{x}-3$  phải là - ớc của 4  $\Rightarrow \sqrt{x}-3 = \pm 1; \pm 2; \pm 4$ .

Tìm đ- ợc các giá trị thích hợp của x là: 1;4;16;25;49

**Bài 18**: Cho biểu thức:

$$A = \left(1 + \frac{\sqrt{x}}{x+1}\right) : \left(\frac{1}{\sqrt{x}-1} - \frac{2\sqrt{x}}{x\sqrt{x} + \sqrt{x} - x - 1}\right)$$

a>Rút gọn biểu thức A

b>Tìm x để A > 1

**Giải**: a> ĐKXĐ:  $x \geq 0; x \neq 1$

$$\begin{aligned}
 A &= \frac{x+1+\sqrt{x}}{x+1} : \left(\frac{1}{\sqrt{x}-1} - \frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{x}(x+1) - (x+1)}\right) \\
 &= \frac{x+\sqrt{x}+1}{x+1} : \left(\frac{1}{\sqrt{x}-1} - \frac{2\sqrt{x}}{(x+1)(\sqrt{x}-1)}\right) \quad (0,5d) \\
 &= \frac{x+\sqrt{x}+1}{x+1} : \frac{x+1-2\sqrt{x}}{(x+1)(\sqrt{x}-1)} \quad (0,5d) \\
 &= \frac{x+\sqrt{x}+1}{x+1} \cdot \frac{(x+1)(\sqrt{x}-1)}{(\sqrt{x}-1)^2} \quad (0,5d) \\
 &= \frac{x+\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1} \quad (0,5d)
 \end{aligned}$$

Vậy  $A = \frac{x+\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1}$  với  $x \geq 0; x \neq 1$

$$b > A > 1 \Leftrightarrow \frac{x+\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1} > 1 \Leftrightarrow \frac{x+\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1} - 1 > 0 \Leftrightarrow \frac{x+\sqrt{x}+1-\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1} > 0 \Leftrightarrow \frac{x+2}{\sqrt{x}-1} > 0$$

Do  $x \geq 0 \Rightarrow x+2 > 0 \Rightarrow \sqrt{x}-1 > 0 \Rightarrow x > 1$ .

Kết hợp với ĐKXD  $0 \leq x < 1$  thì  $A > 1$

**Bài 19 :**

Cho biểu thức

$$M = \left( \frac{2x\sqrt{x} + x - \sqrt{x}}{x\sqrt{x}-1} - \frac{x + \sqrt{x}}{x-1} \right) \frac{x-1}{2x + \sqrt{x}-1} + \frac{\sqrt{x}}{2\sqrt{x}-1}$$

a, Hãy tìm điều kiện của x để biểu thức M có nghĩa, sau đó rút gọn M.

b, Với giá trị nào của x thì biểu thức M đạt giá trị nhỏ nhất và tìm giá trị nhỏ nhất

**Giải :**

a, Điều kiện để biểu thức có nghĩa là:  $x \geq 0, x \neq \frac{1}{4}$  và  $x \neq 1$ .

$$\begin{aligned} M &= \left( \frac{2x\sqrt{x} + x - \sqrt{x}}{x\sqrt{x}-1} - \frac{x + \sqrt{x}}{x-1} \right) \frac{x-1}{2x + \sqrt{x}-1} + \frac{\sqrt{x}}{2\sqrt{x}-1} \\ &= \left[ \frac{\sqrt{x}(2x + \sqrt{x}-1)}{x\sqrt{x}-1} - \frac{x + \sqrt{x}}{x-1} \right] \frac{x-1}{2x + \sqrt{x}-1} + \frac{\sqrt{x}}{2\sqrt{x}-1} \\ &= \frac{\sqrt{x}(x-1)}{x\sqrt{x}-1} - \frac{\sqrt{x}(\sqrt{x}+1)}{(2\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)} + \frac{\sqrt{x}}{2\sqrt{x}-1} = \frac{\sqrt{x}(\sqrt{x}+1)}{(x + \sqrt{x}+1)} - \frac{\sqrt{x}}{2\sqrt{x}-1} + \frac{\sqrt{x}}{2\sqrt{x}-1} \\ &= \frac{\sqrt{x}(\sqrt{x}+1)}{x + \sqrt{x}+1} \end{aligned}$$

b, Do  $x \geq 0$  nên  $M \geq 0$ . Đẳng thức xảy ra khi  $x = 0$

Vậy giá trị nhỏ nhất của M là 0 khi  $x = 0$

**Bài 20 :**

Rút gọn biểu thức sau:

a)  $M = \left( \frac{x\sqrt{x} + 3\sqrt{3}}{x - \sqrt{3x} + 3} - 2\sqrt{x} \right) \frac{\sqrt{x} + \sqrt{3}}{3-x}$  với  $x \geq 0, x \neq 3$ .

:a> ĐKXD:  $x \geq 0; x \neq 1$

$$A = \frac{x+1+\sqrt{x}}{x+1} \cdot \left( \frac{1}{\sqrt{x}-1} - \frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{x}(x+1)-(x+1)} \right)$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{x+\sqrt{x}+1}{x+1} \cdot \left( \frac{1}{\sqrt{x}-1} - \frac{2\sqrt{x}}{(x+1)(\sqrt{x}-1)} \right) (0,5d) \\
&= \frac{x+\sqrt{x}+1}{x+1} \cdot \frac{x+1-2\sqrt{x}}{(x+1)(\sqrt{x}-1)} (0,5d) \\
&= \frac{x+\sqrt{x}+1}{x+1} \cdot \frac{(x+1)(\sqrt{x}-1)}{(\sqrt{x}-1)^2} (0,5d) \\
&= \frac{x+\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1} (0,5d)
\end{aligned}$$

Vậy  $A = \frac{x+\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1}$  với  $x \geq 0; x \neq 1$

$$c > A > 1 \Leftrightarrow \frac{x+\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1} > 1 \Leftrightarrow \frac{x+\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1} - 1 > 0 \Leftrightarrow \frac{x+\sqrt{x}+1-\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1} > 0 \Leftrightarrow \frac{x+2}{\sqrt{x}-1} > 0$$

Do  $x \geq 0 \Rightarrow x+2 > 0 \Rightarrow \sqrt{x}-1 > 0 \Rightarrow x > 1$ .

Kết hợp với ĐKXD  $0 \leq x < 1$  thì  $A > 1$

Bài 16: Cho biểu thức

$$A = \frac{1}{\sqrt{x-1}-\sqrt{x}} + \frac{1}{\sqrt{x-1}+\sqrt{x}} + \frac{\sqrt{x^3-x}}{\sqrt{x}-1}$$

a, Rút gọn A

b, Tìm x để  $A > 0$

c, Tính Giá trị của A khi  $x = \frac{5^3}{9-2\sqrt{7}}$

Câu a:

a, Điều kiện:  $x > 1$

$$A = x - 2\sqrt{x-1}$$

b,  $A > 0$  khi  $1 < x \neq 2$

c,  $A = 7$

**Bài 21 :**

Cho biểu thức:  $P = \left( \frac{x+2}{x\sqrt{x}-1} + \frac{\sqrt{x}}{x+\sqrt{x}+1} + \frac{1}{1-\sqrt{x}} \right) : \frac{\sqrt{x}-1}{2}$  với  $x > 0$  và  $x \neq 1$

a, Rút gọn P.

b, Tìm x để  $P = \frac{2}{7}$

c, So sánh  $P^2$  với  $2P$

$$\begin{aligned}
P &= \left( \frac{x+2}{x\sqrt{x}-1} + \frac{\sqrt{x}}{x+\sqrt{x}+1} + \frac{1}{1-\sqrt{x}} \right) : \frac{\sqrt{x}-1}{2} \text{ với } x > 0 \text{ và } x \neq 1 \\
&= \left( \frac{x+2}{(\sqrt{x})^3-1} + \frac{\sqrt{x}}{x+\sqrt{x}+1} - \frac{1}{\sqrt{x}-1} \right) : \frac{\sqrt{x}-1}{2} \\
&= \left( \frac{x+2}{(\sqrt{x}-1)(x+\sqrt{x}+1)} + \frac{\sqrt{x}}{x+\sqrt{x}+1} - \frac{1}{\sqrt{x}-1} \right) : \frac{\sqrt{x}-1}{2} \\
&= \frac{x+2+\sqrt{x}(\sqrt{x}-1)-(x+\sqrt{x}+1)}{(\sqrt{x}-1)(x+\sqrt{x}+1)} : \frac{\sqrt{x}-1}{2} = \frac{x+2+x-\sqrt{x}-x-\sqrt{x}-1}{(\sqrt{x}-1)(x+\sqrt{x}+1)} \cdot \frac{2}{\sqrt{x}-1}
\end{aligned}$$

Ta có  $P = \frac{2}{x+\sqrt{x}+1}$  (với  $x > 0$ ;  $x \neq 1$ )

Nên

$$\begin{aligned}
P = \frac{2}{7} &\Leftrightarrow \frac{2}{x+\sqrt{x}+1} = \frac{2}{7} \Leftrightarrow x+\sqrt{x}+1=7 \Leftrightarrow x+\sqrt{x}-6=0 \\
&= \frac{x-2\sqrt{x}+1}{(\sqrt{x}-1)(x+\sqrt{x}+1)} \cdot \frac{2}{\sqrt{x}-1} = \frac{2}{x+\sqrt{x}+1} \quad P = \frac{2}{x+\sqrt{x}+1} \\
&\Leftrightarrow (\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+3)=0 \Leftrightarrow \sqrt{x}-2=0 \quad (\text{vì } \sqrt{x}+3 > 0 \text{ với mọi } x > 0) \\
&\Leftrightarrow x=4 \text{ (t/m đk)}.
\end{aligned}$$

Vậy với  $x=4$  thì  $P = \frac{2}{7}$

c, So sánh  $P^2$  với  $2P$

Ta có  $P = \frac{2}{x+\sqrt{x}+1}$  (với  $x > 0$ ;  $x \neq 1$ )

Mà  $x+\sqrt{x}+1 = \left(\sqrt{x} + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} > 0$  với mọi  $x > 0$ ,

nên  $P = \frac{2}{x+\sqrt{x}+1} > 0$  với mọi  $x > 0$

Ta lại có  $x+\sqrt{x} > 0$  với mọi  $x > 0$

$$\Rightarrow x+\sqrt{x}+1 > 1 \Rightarrow \frac{1}{x+\sqrt{x}+1} < 1 \Rightarrow P = \frac{2}{x+\sqrt{x}+1} < 2$$

ì  $P > 0$  và  $P < 2$  nên  $P(P-2) < 0 \Rightarrow P^2 - 2P < 0 \Rightarrow P^2 < 2P$ . Vậy  $P^2 < 2P$

## **Bài 22 :**

Cho biểu thức:  $A = \left(1 - \frac{2\sqrt{a}}{a+1}\right) : \left(\frac{1}{1+\sqrt{a}} - \frac{2\sqrt{a}}{a\sqrt{a} + \sqrt{a} + a+1}\right)$ , với  $a \geq 0$

A, rút gọn biểu thức A.

B, tính giá trị của biểu thức A khi  $a = 2010 - 2\sqrt{2009}$ .

A, điều kiện  $a \geq 0$ . Ta có:

$$\begin{aligned} A &= \left(1 - \frac{2\sqrt{a}}{a+1}\right) : \left(\frac{1}{1+\sqrt{a}} - \frac{2\sqrt{a}}{a\sqrt{a} + \sqrt{a} + a+1}\right), \\ &= \frac{a-2\sqrt{a}+1}{a+1} : \left(\frac{1}{1+\sqrt{a}} - \frac{2\sqrt{a}}{(a+1)(1+\sqrt{a})}\right) \\ &= \frac{(\sqrt{a}-1)^2}{a+1} : \frac{a+1-2\sqrt{a}}{(a+1)(1+\sqrt{a})} \\ &= \frac{(\sqrt{a}-1)^2 (a+1)(1+\sqrt{a})}{(a+1)(\sqrt{a}-1)^2} = 1 + \sqrt{a} \end{aligned}$$

**B,**

Khi  $a = 2010 - 2\sqrt{2009} = (\sqrt{2009} - 1)^2$

Thì  $A = 1 + \sqrt{(\sqrt{2009} - 1)^2} = \sqrt{2009}$

b. Đặt  $C = \sqrt{2x + \sqrt{4x-1}} - \sqrt{2x - \sqrt{4x-1}}$  với  $x > \frac{1}{4}$

ta có  $C^2 = 2$ , mà  $C > 0$  nên  $C = \sqrt{2}$

**Bài 23:** Cho biểu thức  $A = \frac{1}{2(1+\sqrt{x})} + \frac{1}{2(1-\sqrt{x})} - \frac{x^2+2}{1-x^3}$

a. ĐKXD:  $x \geq 0$ ;  $x \neq 1$ .

$$\begin{aligned} A &= \frac{1}{2(1+\sqrt{x})} + \frac{1}{2(1-\sqrt{x})} - \frac{x^2+2}{1-x^3} = \frac{1}{2(1+\sqrt{x})} + \frac{1}{2(1-\sqrt{x})} - \frac{x^2+2}{(1-\sqrt{x})(1+\sqrt{x})(x^2+x+1)} \\ &= \frac{(1-\sqrt{x})(x^2+x+1) + (1+\sqrt{x})(x^2+x+1) - 2(x^2+2)}{2(1-\sqrt{x})(1+\sqrt{x})(x^2+x+1)} \\ &= \frac{2x-2}{2(1+\sqrt{x})(1-\sqrt{x})(x^2+x+1)} = \frac{2(x-1)}{2(1-x)(x^2+x+1)} \\ &= \frac{x-1}{-(x^2+x+1)(x-1)} = \frac{-1}{x^2+x+1} \end{aligned}$$

b. Vì  $x \geq 0 \Rightarrow x^2 + x + 1 \geq 1$

$$\Rightarrow \text{Min } (x^2 + x + 1) = 1 \text{ khi } x=0$$

$$\Rightarrow \text{Max } \frac{1}{x^2+x+1} = 1 \quad \text{Khi } x=0$$

Do  $A = \frac{-1}{x^2+x+1}$  nên  $A$  đạt giá trị nhỏ nhất khi và chỉ khi  $\frac{1}{x^2+x+1}$  đạt giá trị lớn nhất

Vậy  $\text{Min } A = -1$  khi  $x=0$

c. Để  $A \in \mathbf{Z}$  thì  $x^2 + x + 1$  phải là Ư(-1)

$$\Leftrightarrow x^2 + x + 1 = \pm 1$$

$$x^2 + x + 1 > 0 \text{ với mọi } x \Rightarrow x^2 + x + 1 = 1$$

$$\Rightarrow x^2 + x = 0 \Rightarrow x(x+1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x=0 \\ x=-1(\text{loại}) \end{cases}$$

Vậy với  $x=0$  thì  $A \in \mathbf{Z}$

**Bài 24 :** Chứng minh rằng với mọi số thực  $a$ , ta đều có :  $\frac{a^2+2}{\sqrt{a^2+1}} \geq 2$ . Khi nào có đẳng thức ?

**Giải :** Ta có :  $\frac{a^2+2}{\sqrt{a^2+1}} = \frac{(\sqrt{a^2+1})^2+1}{\sqrt{a^2+1}} = \sqrt{a^2+1} + \frac{1}{\sqrt{a^2+1}}$ . Áp dụng bất đẳng thức Cauchy:

$$\sqrt{a^2+1} + \frac{1}{\sqrt{a^2+1}} \geq 2\sqrt{\sqrt{a^2+1} \cdot \frac{1}{\sqrt{a^2+1}}} = 2. \text{ Vậy } \frac{a^2+2}{\sqrt{a^2+1}} \geq 2. \text{ Đẳng thức xảy ra khi}$$

$$\sqrt{a^2+1} = \frac{1}{\sqrt{a^2+1}} \Leftrightarrow a=0.$$

**Bài 26 :** Cho biểu thức:  $P = \frac{x}{x-\sqrt{x}} + \frac{2}{x+2\sqrt{x}} + \frac{x+2}{(\sqrt{x}-1)(x+2\sqrt{x})}$

a. Rút gọn  $P$ .

b. Tính  $P$  khi  $x=3+2\sqrt{2}$ .

c. Tìm giá trị nguyên của  $x$  để  $P$  nhận giá trị nguyên.

**Giải :** a/

$$\begin{aligned} P &= \frac{x}{\sqrt{x}(\sqrt{x}-1)} + \frac{2}{\sqrt{x}(\sqrt{x}+2)} + \frac{x+2}{\sqrt{x}(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+2)} \\ &= \frac{x(\sqrt{x}+2) + 2(\sqrt{x}-1) + x+2}{\sqrt{x}(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+2)} = \frac{x\sqrt{x} + 2x + 2\sqrt{x} - 2 + x + 2}{\sqrt{x}(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+2)} \\ &= \frac{x\sqrt{x} + 2x + 2\sqrt{x} + x}{\sqrt{x}(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+2)} = \frac{\sqrt{x}(\sqrt{x}+1)(\sqrt{x}+2)}{\sqrt{x}(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+2)} = \frac{(\sqrt{x}+1)}{(\sqrt{x}-1)} \end{aligned}$$

$$\text{b/ } x=3+2\sqrt{2} \Leftrightarrow \sqrt{x} = \sqrt{2+2\sqrt{2}+1} = \sqrt{(\sqrt{2}+1)^2} = \sqrt{2}+1$$

$$P = \frac{(\sqrt{x}+1)}{(\sqrt{x}-1)} = \frac{\sqrt{2}+1+1}{\sqrt{2}+1-1} = \frac{\sqrt{2}+2}{\sqrt{2}} = 1 + \sqrt{2}$$

c/ ĐK:  $x > 0; x \neq 1$ :

$$P = \frac{(\sqrt{x}+1)}{(\sqrt{x}-1)} = \frac{\sqrt{x}-1+2}{\sqrt{x}-1} = 1 + \frac{2}{\sqrt{x}-1} \quad x=4 \text{ hoặc } x=9$$

**Bài 27 : a) Tính giá trị biểu thức :  $P = x^3 + y^3 - 3(x+y) + 2004$ .**

**Trong đó**  $x = \sqrt[3]{3+2\sqrt{2}} + \sqrt[3]{3-2\sqrt{2}}; y = \sqrt[3]{17+12\sqrt{2}} + \sqrt[3]{17-2\sqrt{2}}$

**H- ớng dẫn :**

$$x = \sqrt[3]{3+2\sqrt{2}} + \sqrt[3]{3-2\sqrt{2}}; \Rightarrow x^3 - 3x = 6$$

$$y = \sqrt[3]{17+12\sqrt{2}} + \sqrt[3]{17-2\sqrt{2}} \Rightarrow y^3 - 3y = 34$$

**Do đó :  $P = x^3 + y^3 - 3(x+y) + 2004 = x^3 - 3x + y^3 - 3y + 2004 = 6 + 34 + 2004 = 2044$**

**Bài 28 : Chứng tỏ  $x = \sqrt[3]{9+4\sqrt{5}} + \sqrt[3]{9-4\sqrt{5}}$  là nghiệm của ph- ơng trình**

$$x^3 - 3x - 18 = 0$$

**Tính  $x = ?$**

**HD:** Từ  $x = \sqrt[3]{9+4\sqrt{5}} + \sqrt[3]{9-4\sqrt{5}}$

$$\Leftrightarrow x^3 = 9 + 4\sqrt{5} + 9 - 4\sqrt{5} + 3\sqrt[3]{(9+4\sqrt{5})^2(9-4\sqrt{5})} + 3\sqrt[3]{(9+4\sqrt{5})(9-4\sqrt{5})^2}$$

$$\Leftrightarrow x^3 = 18 + 3\sqrt[3]{9+4\sqrt{5}} + 3\sqrt[3]{9-4\sqrt{5}}$$

$$\Leftrightarrow x^3 - 3x - 18 = 0$$

**\*) Tính x nh- sau  $x^3 - 3x - 18 = 0$**

$$\Leftrightarrow x^3 - 27 - 3x + 9 = 0$$

$$\Leftrightarrow (x-3)(x^2 - 3x + 6) = 0 \quad (x^2 - 3x + 6 \neq 0) \Leftrightarrow x - 3 = 0 \Leftrightarrow x = 3$$

**Bài 29 : Chứng minh giá trị biểu thức D không phụ thuộc vào a :**

$$D = \left( \frac{2 + \sqrt{a}}{a + 2\sqrt{a} + 1} - \frac{\sqrt{a} - 2}{a - 1} \right) \frac{a\sqrt{a} + a - \sqrt{a} - 1}{\sqrt{a}} \quad \text{với } a > 0 ; a \neq 1$$

**Bài 30 : Cho biểu thức :  $A = \left( \sqrt{m + \frac{2mn}{1+n^2}} + \sqrt{m - \frac{2mn}{1+n^2}} \right) \sqrt{1 + \frac{1}{n^2}}$  với  $m \neq 0 ; n \neq 1$**

**a) Rút gọn biểu thức A.**

**b) Tìm giá trị của A với  $m = \sqrt{56 + 24\sqrt{5}}$ .**

**c) Tìm giá trị nhỏ nhất của A.**

**Bài 31 :** Cho biểu thức  $A = \frac{x+2}{x\sqrt{x}-1} + \frac{\sqrt{x}+1}{x+\sqrt{x}+1} - \frac{1}{\sqrt{x}-1}$

a. Rút gọn biểu thức A

ĐKXD:  $x \geq 0; x \neq 1$

$$A = \frac{x+2}{x\sqrt{x}-1} + \frac{\sqrt{x}+1}{x+\sqrt{x}+1} - \frac{1}{\sqrt{x}-1} = \frac{x+2+x-1-x-\sqrt{x}-1}{(\sqrt{x}-1)(x+\sqrt{x}+1)}$$

$$= \frac{x - \sqrt{x}}{(\sqrt{x} - 1)(x + \sqrt{x} + 1)} = \frac{\sqrt{x}(\sqrt{x} - 1)}{(\sqrt{x} - 1)(x + \sqrt{x} + 1)} = \frac{\sqrt{x}}{x + \sqrt{x} + 1}$$

b. Tính giá trị biểu thức A khi  $x = 33 - 8\sqrt{2}$

$$\text{Ta có } x = 33 - 8\sqrt{2} = (4\sqrt{2} - 1)^2 \Rightarrow \sqrt{x} = 4\sqrt{2} - 1$$

$$\Rightarrow A = \frac{4\sqrt{2} - 1}{33 - 8\sqrt{2} + 4\sqrt{2} - 1 + 1} = \frac{4\sqrt{2} - 1}{33 - 4\sqrt{2}}$$

c. Chứng minh  $A < \frac{1}{3}$

$$\text{Xét } A - \frac{1}{3} = \frac{\sqrt{x}}{x + \sqrt{x} + 1} - \frac{1}{3} = \frac{3\sqrt{x} - x - \sqrt{x} - 1}{3(x + \sqrt{x} + 1)} = \frac{-(x - 2\sqrt{x} + 1)}{3(x + \sqrt{x} + 1)} = \frac{-(\sqrt{x} - 1)^2}{3(x + \sqrt{x} + 1)}$$

$$\text{Do } x \geq 0; x \neq 1 \Rightarrow \begin{cases} -(\sqrt{x} - 1)^2 < 0 \\ 3(x + \sqrt{x} + 1) > 0 \end{cases} \Rightarrow \frac{-(\sqrt{x} - 1)^2}{3(x + \sqrt{x} + 1)} < 0$$

$$\Rightarrow A - \frac{1}{3} < 0 \Leftrightarrow A < \frac{1}{3}$$

**Bài 32 :** Tính giá trị của biểu thức  $A = (3x^3 + 8x^2 + 2)^{2011}$  với  $x = \frac{(\sqrt{5} + 2)\sqrt[3]{17\sqrt{5} - 38}}{\sqrt{5} + \sqrt{14 - 6\sqrt{5}}}$ .

$$\text{Ta có : } x = \frac{(\sqrt{5} + 2)\sqrt[3]{17\sqrt{5} - 38}}{\sqrt{5} + \sqrt{14 - 6\sqrt{5}}} = \frac{(\sqrt{5} + 2)\sqrt[3]{5\sqrt{5} - 3 \cdot 5 \cdot 2 + 3 \cdot \sqrt{5} \cdot 4 - 8}}{\sqrt{5} + \sqrt{(3 - \sqrt{5})^2}}$$

$$= \frac{(\sqrt{5} + 2)\sqrt[3]{(\sqrt{5} - 2)^3}}{\sqrt{5} + 3 - \sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}^2 - 2^2}{3} = \frac{1}{3}$$

$$\text{Vậy } A = \left( 3 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^3 + 8 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^2 + 2 \right)^{2011} = 3^{2011}$$

**Bài 33 :** a)  $\frac{2}{(2n+1)(\sqrt{n} + \sqrt{n+1})} < \frac{1}{\sqrt{n}} - \frac{1}{\sqrt{n+1}}$

$$\text{Ta có : } \frac{2}{(2n+1)(\sqrt{n} + \sqrt{n+1})} = \frac{2 \cdot (\sqrt{n+1} - \sqrt{n})}{(2n+1)(\sqrt{n} + \sqrt{n+1})(\sqrt{n+1} - \sqrt{n})}$$

$$= \frac{2 \cdot (\sqrt{n+1} - \sqrt{n})}{2n+1} = \frac{2 \cdot (\sqrt{n+1} - \sqrt{n})}{\sqrt{4n^2 + 4n+1}} < \frac{2 \cdot (\sqrt{n+1} - \sqrt{n})}{\sqrt{4n^2 + 4n}}$$

$$\text{mà } \frac{2 \cdot (\sqrt{n+1} - \sqrt{n})}{\sqrt{4n^2 + 4n}} = \frac{2 \cdot (\sqrt{n+1} - \sqrt{n})}{2\sqrt{n(n+1)}} = \frac{\sqrt{n+1}}{\sqrt{n} \cdot \sqrt{n+1}} - \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n} \cdot \sqrt{n+1}} = \frac{1}{\sqrt{n}} - \frac{1}{\sqrt{n+1}}$$

**Bài 34:** a) Chứng minh  $\forall n \in \mathbb{N}^*$ . Ta có:  $\frac{1}{(n+1)\sqrt{n} + n\sqrt{n+1}} = \frac{1}{\sqrt{n}} - \frac{1}{\sqrt{n+1}}$

$$\begin{aligned} \text{Từ } \frac{1}{(n+1)\sqrt{n} + n\sqrt{n+1}} &= \frac{1}{\sqrt{(n+1)n} \cdot (\sqrt{n+1} + \sqrt{n})} \\ &= \frac{(\sqrt{n+1} - \sqrt{n})}{\sqrt{(n+1)n} \cdot (\sqrt{n+1} + \sqrt{n})(\sqrt{n+1} - \sqrt{n})} = \frac{(\sqrt{n+1} - \sqrt{n})}{\sqrt{(n+1)n}} = \frac{\sqrt{n+1}}{\sqrt{(n+1)n}} - \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{(n+1)n}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{n}} - \frac{1}{\sqrt{n+1}}. \end{aligned}$$

b) Áp dụng:

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{2+\sqrt{2}} + \frac{1}{3\sqrt{2}+2\sqrt{3}} + \frac{1}{4\sqrt{3}+3\sqrt{4}} + \frac{1}{5\sqrt{4}+4\sqrt{5}} + \dots + \frac{1}{2012\sqrt{2011}+2011\sqrt{2012}} \\ &= 1 - \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{1}{\sqrt{4}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{2011}} - \frac{1}{\sqrt{2012}} = 1 - \frac{1}{\sqrt{2012}} = \frac{\sqrt{2012}-1}{\sqrt{2012}} \\ a) \sqrt{75} + \sqrt{48} + \sqrt{300} &= \sqrt{25 \cdot 3} + \sqrt{16 \cdot 3} - \sqrt{100 \cdot 3} \\ &= 5\sqrt{3} + 4\sqrt{3} - 10\sqrt{3} = -\sqrt{3} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} b) \frac{2}{\sqrt{3}-1} - \frac{2}{\sqrt{3}+1} &= \frac{2(\sqrt{3}+1)}{(\sqrt{3}-1)(\sqrt{3}+1)} - \frac{2(\sqrt{3}-1)}{(\sqrt{3}+1)(\sqrt{3}-1)} \\ &= \frac{2\sqrt{3}+2-2\sqrt{3}+2}{(\sqrt{3}-1)(\sqrt{3}+1)} = \frac{4}{2} = 2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} c) \sqrt{9a} - \sqrt{16a} + \sqrt{49a} &= 3\sqrt{a} - 4\sqrt{a} + 7\sqrt{a} \\ &= 6\sqrt{a} \end{aligned}$$

**Bài 35** Cho biểu thức  $A = \left( \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1} + \frac{2}{x-\sqrt{x}} \right) : \frac{1}{\sqrt{x}-1}$

(Đề thi lớp 10A1 trường THPT NLIH năm học 2007-2008)

a) Tìm điều kiện xác định, Rút gọn A

b) Tính giá trị của A khi  $x=3-2\sqrt{2}$

c) Tìm giá trị nhỏ nhất của A.

**Bài giải:** a) ĐKXD  $x > 0; x \neq 1$ .

$$\text{Rút gọn } A = \left( \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1} + \frac{2}{x-\sqrt{x}} \right) : \frac{1}{\sqrt{x}-1} = \left( \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1} + \frac{2}{\sqrt{x}(\sqrt{x}-1)} \right) : \frac{1}{\sqrt{x}-1}$$

$$A = \frac{(\sqrt{x})^2 + 2}{\sqrt{x}(\sqrt{x} - 1)} \cdot \frac{\sqrt{x} - 1}{1} = \frac{(x + 2)(\sqrt{x} - 1)}{\sqrt{x}(\sqrt{x} - 1)} = \frac{x + 2}{\sqrt{x}}$$

b. Khi  $x = 3 - 2\sqrt{2} = (\sqrt{x} - 1)^2 \Rightarrow \sqrt{x} = \sqrt{2} - 1$

$$\Rightarrow A = \frac{3 - 2\sqrt{2} + 2}{\sqrt{2} - 1} = \frac{5 - 2\sqrt{2}}{\sqrt{2} - 1} = \frac{(5 - 2\sqrt{2})(\sqrt{2} + 1)}{1} = 1 - 3\sqrt{2}$$

c) Ta có  $A = \frac{x + 2}{\sqrt{x}} = \sqrt{x} + \frac{2}{\sqrt{x}} \geq 2\sqrt{2}$  ( BĐT Côsi cho hai số d-ong)

$$\Rightarrow A_{\min} = 2\sqrt{2} \Leftrightarrow \sqrt{x} = \frac{2}{\sqrt{x}} \Leftrightarrow x = 2 \text{ (TMĐK)}$$

Vậy  $A_{\min} = 2\sqrt{2} \Leftrightarrow x = 2$ .

**Bài 36:** ( Đề thi tốt nghiệp năm 2002-2003)

Cho biểu thức  $A = \left( \frac{1}{\sqrt{x} - 3} - \frac{1}{\sqrt{x} + 3} \right) : \frac{3}{\sqrt{x} - 3}$

a) Tìm điều kiện xác định, rút gọn biểu thức A

b) Với giá trị nào của x thì  $A > \frac{1}{3}$

c) Tìm x để A đạt giá trị lớn nhất

**Bài giải:** a) ĐKXD  $x \geq 0; x \neq 9$

$$A = \left( \frac{1}{\sqrt{x} - 3} - \frac{1}{\sqrt{x} + 3} \right) : \frac{3}{\sqrt{x} - 3} = \frac{\sqrt{x} + 3 - (\sqrt{x} - 3)}{(\sqrt{x} - 3)(\sqrt{x} + 3)} \cdot \frac{\sqrt{x} - 3}{3} = \frac{6}{(\sqrt{x} - 3)(\sqrt{x} + 3)} \cdot \frac{\sqrt{x} - 3}{3}$$

$$A = \frac{2}{\sqrt{x} + 3}$$

b)  $A > \frac{1}{3} \Leftrightarrow \frac{2}{\sqrt{x} + 3} > \frac{1}{3} \Leftrightarrow \frac{2}{\sqrt{x} + 3} - \frac{1}{3} > 0 \Leftrightarrow \frac{3 - \sqrt{x}}{3(\sqrt{x} + 3)} > 0$

$$\Leftrightarrow 3 - \sqrt{x} > 0 \text{ ( vì } 3(\sqrt{x} + 3) > 0 \text{ ) } \Leftrightarrow \sqrt{x} < 9 \Leftrightarrow x < 9$$

Kết quả hợp với ĐKXD:  $0 \leq x < 9$  thì  $A > 1/3$ .

c)  $A = \frac{2}{\sqrt{x} + 3}$  đạt giá trị lớn nhất khi  $\sqrt{x} + 3$  đạt giá trị nhỏ nhất.

Mà  $\sqrt{x} + 3 \geq 3 \Rightarrow (\sqrt{x} + 3)_{\min} = 3 \Leftrightarrow \sqrt{x} = 0 \Leftrightarrow x = 0$  lúc đó  $A_{\max} = \frac{2}{3} \Leftrightarrow x = 0$ .

**Bài 37:** ( Đề thi vào lớp 10 năm học 2008-2009)

Cho biểu thức  $P = \left( \frac{3}{1 - x} + \frac{1}{\sqrt{x} + 1} \right) : \frac{1}{\sqrt{x} + 1}$

- a) Nêu điều kiện xác định và rút gọn biểu thức P
- b) Tìm các giá trị của x để  $P = \frac{5}{4}$
- c) Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:  $M = \frac{x+12}{\sqrt{x}-1} \cdot \frac{1}{P}$

**Bài giải:** a) ĐKXD  $x \geq 0; x \neq 1$

$$P = \left[ \frac{3}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)} + \frac{1}{\sqrt{x}+1} \right] = \frac{3+\sqrt{x}-1}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)} \cdot \frac{\sqrt{x}+1}{1} = \frac{(\sqrt{x}+2)(\sqrt{x}+1)}{(\sqrt{x}+1)(\sqrt{x}-1)} = \frac{\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}-1}$$

$$b) P = \frac{5}{4} \Leftrightarrow \frac{\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}-1} = \frac{5}{4} \Leftrightarrow 4(\sqrt{x}+2) = 5(\sqrt{x}-1) \Leftrightarrow 4\sqrt{x}+8 = 5\sqrt{x}-5.$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{x} = 13 \Leftrightarrow x = 168 \text{ (TMDK)}$$

$$c) M = \frac{x+12}{\sqrt{x}-1} \cdot \frac{1}{P} = \frac{x+12}{\sqrt{x}-1} \cdot \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+2} = \frac{x+12}{\sqrt{x}+2} = \frac{x-4+16}{\sqrt{x}+2}$$

$$= \sqrt{x} - 2 + \frac{16}{\sqrt{x}+2} = \sqrt{x} + 2 + \frac{16}{\sqrt{x}+2} - 4 \text{ ta có } \sqrt{x} + 2 + \frac{16}{\sqrt{x}+2} \geq 2\sqrt{16} = 2 \cdot 4 = 8$$

$$M \geq 8 - 4 = 4 \Leftrightarrow M_{\min} = 4 \Leftrightarrow \sqrt{x} + 2 = \frac{16}{\sqrt{x}+2}$$

$$\Leftrightarrow (\sqrt{x} + 2)^2 = 16 \Leftrightarrow (\sqrt{x} + 2 + 4)(\sqrt{x} + 2 - 4) = 0$$

$$\Leftrightarrow (\sqrt{x} + 6)(\sqrt{x} - 2) = 0 \Leftrightarrow \sqrt{x} - 2 = 0 \Leftrightarrow x = 4 \text{ (TMDK)}$$

Vậy  $M_{\min} = 4 \Leftrightarrow x = 4$ .

**Bài 38:** Cho biểu thức:  $D = \left( \frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{x}+3} + \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-3} - \frac{3x+3}{x-9} \right) \left( \frac{2\sqrt{x}-2}{\sqrt{x}-3} - 1 \right)$

a) Tìm ĐKXD, rút gọn biểu thức

b) Tìm x để  $D < -\frac{1}{2}$

c) Tìm giá trị nhỏ nhất của D

**Bài giải:** a) ĐKXD:  $a \geq 0; a \neq 1$

$$P = \left[ \frac{\sqrt{a}(\sqrt{a}+2)}{\sqrt{a}+2} - 1 \right] \left[ \frac{\sqrt{a}(\sqrt{a}-1)}{\sqrt{a}-1} + 1 \right] = (\sqrt{a}-1) : (\sqrt{a}+1) = \frac{\sqrt{a}-1}{\sqrt{a}+1}$$

$$b) P = \frac{\sqrt{a}-1}{\sqrt{a}+1} = 1 - \frac{2}{\sqrt{a}+1}$$

để P nhận giá trị nguyên thì  $\frac{2}{\sqrt{a}+1}$  nhận giá trị nguyên d-ong.  $\Rightarrow \sqrt{a}+1$  thuộc - óc d-ong của 2.

$$\Rightarrow \begin{cases} \sqrt{a}+1=1 \\ \sqrt{a}+1=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=0 \\ a=1 \end{cases} \quad a=1 \text{ (Loại vì không thoả m\ddot{a}i điều kiện)}$$

Vậy P nhận giá trị nguyên khi  $a=0$

**Bài 39:** ( Đề thi vào lớp 10 A<sub>1</sub> tr- òng THPT NL<sub>II</sub> năm 2004-2005)

Cho biểu thức  $B = \frac{1}{2(\sqrt{x+3}-1)} - \frac{1}{2(\sqrt{x+3}+1)}$

- a) Tìm x để B có nghĩa và rút gọn B.  
b) Tìm x nguyên để B nhận giá trị nguyên.

**Bài giải:** a) ĐKXĐ  $x \geq -3; x \neq -2$

$$B = \frac{1}{2(\sqrt{x+3}-1)} - \frac{1}{2(\sqrt{x+3}+1)} = \frac{\sqrt{x+3}+1 - (\sqrt{x+3}-1)}{2(x+3-1)} = \frac{2}{2(x+2)} = \frac{1}{x+2}$$

b) B nhận giá trị nguyên khi  $\frac{1}{x+2}$  nhận giá trị nguyên.

$$\Rightarrow x+2 \in U(1)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x+2=1 \\ x+2=-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-1 \\ x=-3 \end{cases} \text{ thoả m\ddot{a}n điều kiện}$$

Vậy  $x=-1; x=-3$  thì B nhận giá trị nguyên

**Bài 40** Cho biểu thức  $P = \frac{x^2 - \sqrt{x}}{x + \sqrt{x} + 1} - \frac{2x + \sqrt{x}}{\sqrt{x}} + \frac{2(x-1)}{\sqrt{x}-1}$

- a) Tìm ĐKXĐ, rút gọn P  
b) Tìm giá trị nhỏ nhất của P  
c) Tìm x để biểu thức  $Q = \frac{2\sqrt{x}}{P}$  nhận giá trị nguyên.

**Bài 41** ( Đề thi vào lớp 10 năm học 2006-2007)

Cho biểu thức:  $P = \left( \frac{1}{\sqrt{x}-x} + \frac{1}{1-\sqrt{x}} \right) : \frac{\sqrt{x}+1}{(1-\sqrt{x})^2}$

- a) Tìm ĐKXĐ và rút gọn P      b) Tìm x để  $P > 0$

**Bài giải** a) ĐKXĐ  $x > 0; x \neq 1$

$$P = \left[ \frac{1}{\sqrt{x}(1-\sqrt{x})} + \frac{1}{1-\sqrt{x}} \right] : \frac{\sqrt{x}+1}{(1-\sqrt{x})^2} = \frac{1+\sqrt{x}}{\sqrt{x}(1-\sqrt{x})} \cdot \frac{(1-\sqrt{x})^2}{\sqrt{x}+1} = \frac{1-\sqrt{x}}{\sqrt{x}}$$

$$b) P > 0 \Leftrightarrow \frac{1-\sqrt{x}}{\sqrt{x}} > 0 \Leftrightarrow 1-\sqrt{x} > 0 \text{ (vì } \sqrt{x} > 0) \Leftrightarrow \sqrt{x} < 1 \Leftrightarrow x < 1.$$

Kết hợp với ĐKXD:  $0 < x < 1$  thì  $P > 0$

**Bài 42:** (Đề thi vào lớp 10 năm học 2007-2008)

$$\text{Cho biểu thức } A = \left( \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1} - \frac{1}{x-\sqrt{x}} \right) : \frac{1}{\sqrt{x}-1}$$

a) Tìm ĐKXD và rút gọn A

b) Tìm tất cả các giá trị của x sao cho  $A < 0$

c) Tìm tất cả các giá trị của tham số m để ph-ong trình  $A \cdot \sqrt{x} = m - \sqrt{x}$  có nghiệm.

**Bài giải** a) ĐKXD:  $x > 0; x \neq 1$

$$A = \left( \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1} - \frac{1}{x-\sqrt{x}} \right) : \frac{1}{\sqrt{x}-1} = \left[ \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1} - \frac{1}{\sqrt{x}(\sqrt{x}-1)} \right] : \frac{1}{\sqrt{x}-1} = \frac{(\sqrt{x})^2 - 1}{(\sqrt{x}-1)\sqrt{x}} \cdot \frac{\sqrt{x}-1}{1} = \frac{x-1}{\sqrt{x}}$$

$$b) A < 0 \Leftrightarrow \frac{x-1}{\sqrt{x}} < 0 \Leftrightarrow x-1 < 0 \text{ (vì } \sqrt{x} > 0) \Leftrightarrow x < 1 \text{ kết hợp với ĐKXD } 0 < x < 1 \text{ thì } A < 0$$

$$c) \text{ P.t: } A \cdot \sqrt{x} = m - \sqrt{x} \Leftrightarrow \frac{x-1}{\sqrt{x}} \cdot \sqrt{x} = m - \sqrt{x} \Leftrightarrow x-1 = m - \sqrt{x} \quad (1)$$

$$\Leftrightarrow x-1 = m - \sqrt{x} \Leftrightarrow x + \sqrt{x} - (m+1) = 0 \quad (*)$$

Đặt  $\sqrt{x} = t > 0$  ta có ph-ong trình  $t^2 + t - (m+1) = 0 \quad (*)$  để ph-ong trình (1) có nghiệm thì ph-ong trình (\*) phải có nghiệm d-ong.

$$\text{Để ph-ong trình (*) có nghiệm d-ong thì: } \begin{cases} \Delta = 1 + 4(m+1) \geq 0 \\ -(m+1) < 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 4m+5 \geq 0 \\ m+1 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \geq -\frac{5}{4} \\ m > -1 \end{cases} \Rightarrow m > -1 \text{ Vậy } m > -1 \text{ và } m \neq 1 \text{ thì pt } A \cdot \sqrt{x} = m - \sqrt{x} \text{ có}$$

nghiệm.

**Bài 43:** (Đề thi vào lớp 10 năm học 2004-2005)

$$\text{Cho biểu thức: } P = \left( 1 + \frac{1}{\sqrt{x}-1} \right) \cdot \frac{1}{x-\sqrt{x}}$$

a) Tìm ĐKXD và rút gọn P

b) Tìm giá trị của P khi  $x = 25$

$$c) \text{ Tìm x để } P \cdot \sqrt{5+2\sqrt{6}} \cdot (\sqrt{x}-1)^2 = x - 2005 + \sqrt{2} + \sqrt{3}.$$

**Bài giải:**

$$a) \text{ ĐKXD } x > 0; x \neq 1: P = \left(1 + \frac{1}{\sqrt{x}-1}\right) \cdot \frac{1}{x-\sqrt{x}} = \left(\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1} - \frac{1}{\sqrt{x}(\sqrt{x}-1)}\right)$$

$$\Leftrightarrow P = \frac{1}{(\sqrt{x}-1)^2}$$

$$b) \text{ Khi } x=25 \Rightarrow P = \frac{1}{(\sqrt{25}-1)^2} = \frac{1}{16}$$

$$c) P \cdot \sqrt{5+2\sqrt{6}} \cdot (\sqrt{x}-1)^2$$

$$= x - 2005 + \sqrt{2} + \sqrt{3} \Leftrightarrow \frac{1}{(\sqrt{x}-1)^2} \cdot \sqrt{(\sqrt{2}+\sqrt{3})^2} \cdot (\sqrt{x}-1)^2 = x - 2005 + \sqrt{2} + \sqrt{3}$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{2} + \sqrt{3} = x - 2005 + \sqrt{2} + \sqrt{3} \Leftrightarrow x = 2005 \quad \text{TMĐK}$$

$$\text{Vậy } x = 2005 \text{ thì } P \cdot \sqrt{5+2\sqrt{6}} \cdot (\sqrt{x}-1)^2 = x - 2005 + \sqrt{2} + \sqrt{3}$$

**Bài 44:** (Đề thi vào lớp 10 năm học 2003-2004)

$$\text{Cho biểu thức } A = \left(\frac{1}{\sqrt{x}-1} + \frac{1}{\sqrt{x}+1}\right) \cdot \left(1 + \frac{1}{\sqrt{x}}\right)$$

a) Tìm ĐKXD, và rút gọn A.

b) Tính giá trị của A khi  $x = \frac{1}{4}$ .

c) Tìm giá trị của x để  $\sqrt{A} > A$ .

**Bài giải:**a) ĐKXD  $x > 0; x \neq 1$ .

$$A = \left(\frac{1}{\sqrt{x}-1} + \frac{1}{\sqrt{x}+1}\right) \cdot \left(1 + \frac{1}{\sqrt{x}}\right) = \frac{\sqrt{x}+1+\sqrt{x}-1}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)} \cdot \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}} = \frac{2\sqrt{x}(\sqrt{x}+1)}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)\sqrt{x}} \Rightarrow A = \frac{2}{\sqrt{x}-1}$$

$$b) \text{ Khi } x = \frac{1}{4} \Rightarrow A = \frac{2}{\sqrt{\frac{1}{4}}-1} = \frac{2}{\frac{1}{2}-1} = -4$$

$$c) \sqrt{A} > 0 \Leftrightarrow 0 < A < 1 \Leftrightarrow 0 < \frac{2}{\sqrt{x}-1} < 1.$$

$$+0 < \frac{2}{\sqrt{x}-1} \Leftrightarrow \sqrt{x}-1 > 0 \Leftrightarrow x > 1(1)$$

$$+\frac{2}{\sqrt{x}-1} < 1 \Leftrightarrow 1 - \frac{2}{\sqrt{x}-1} > 0 \Leftrightarrow \frac{\sqrt{x}-3}{\sqrt{x}-1} > 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x}-3 > 0 \\ \sqrt{x}-1 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow x > 9 \quad \text{Vậy } x > 9 \text{ thì } \sqrt{A} > A$$

**Bài 45:** (Đề thi vào lớp 10 năm học 2001-2002)

Cho biểu thức  $A = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1} - \frac{2\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}(\sqrt{x}-1)}$

a) Tìm ĐKXD, rút gọn biểu thức A

b) Tính giá trị của biểu thức A

c) Với giá trị nào của x thì  $|A| > A$

**Bài giải:** a) ĐKXD  $x > 0; x \neq 1$ .

$$A = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1} - \frac{2\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}(\sqrt{x}-1)} = \frac{(\sqrt{x})^2 - 2\sqrt{x} + 1}{\sqrt{x}(\sqrt{x}-1)} = \frac{(\sqrt{x}-1)^2}{\sqrt{x}(\sqrt{x}-1)} = \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}}$$

b) Khi  $x=36 \Rightarrow A = \frac{\sqrt{36}-1}{\sqrt{36}} = \frac{5}{6}$

c)  $|A| > A \Leftrightarrow A < 0 \Leftrightarrow \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}} < 0 \Leftrightarrow \sqrt{x}-1 < 0$  (vì  $\sqrt{x} > 0$ )

$\Leftrightarrow \sqrt{x} < 1 \Leftrightarrow x < 1$  Kết hợp với điều kiện xác định  $0 < x < 1$  thì  $|A| > A$

2) Rút gọn biểu thức sau :  $A = \sqrt{4+\sqrt{10+2\sqrt{5}}} + \sqrt{4-\sqrt{10+2\sqrt{5}}} - \sqrt{5}$

Đặt  $B = \sqrt{4+\sqrt{10+2\sqrt{5}}} + \sqrt{4-\sqrt{10+2\sqrt{5}}}$ ,  $B > 0$

Ta có  $B^2 = 4 + \sqrt{10+2\sqrt{5}} + 4 - \sqrt{10+2\sqrt{5}} + 2\sqrt{(4+\sqrt{10+2\sqrt{5}})(4-\sqrt{10+2\sqrt{5}})}$

$$B^2 = 8 + 2\sqrt{16 - (10+2\sqrt{5})}$$

$$B^2 = 8 + 2\sqrt{(\sqrt{5}-1)^2} = 6 + 2\sqrt{5} \quad B = \sqrt{(\sqrt{5}+1)^2} = \sqrt{5}+1, \text{ Vì } B > 0$$

Vậy  $A = \sqrt{5}+1 - \sqrt{5} = 1$

Bài 46 : Cho  $P = \left( \frac{x-y}{\sqrt{x}-\sqrt{y}} + \frac{\sqrt{x^3}-\sqrt{y^3}}{y-x} \right) : \left( \frac{(\sqrt{x}-\sqrt{y})^2 + \sqrt{xy}}{\sqrt{x}+\sqrt{y}} \right)$

A, Rút gọn P =?

B, Tính P khi  $x=5-2\sqrt{6}$  ,  $y=5+2\sqrt{6}$

C, Chứng minh  $0 \leq P \leq 1$

$$\begin{aligned} \text{Giải : } P &= \left( \frac{(\sqrt{x} + \sqrt{y})(\sqrt{x} - \sqrt{y})}{\sqrt{x} - \sqrt{y}} - \frac{(\sqrt{x} - \sqrt{y})(x + \sqrt{xy} + y)}{(\sqrt{x} + \sqrt{y})(\sqrt{x} - \sqrt{y})} \right) : \frac{x - 2\sqrt{xy} + y + \sqrt{xy}}{\sqrt{x} + \sqrt{y}} \\ &= \left( \sqrt{x} + \sqrt{y} - \frac{x + \sqrt{xy} + y}{\sqrt{x} + \sqrt{y}} \right) : \frac{x - \sqrt{xy} + y}{\sqrt{x} + \sqrt{y}} = \frac{x + 2\sqrt{xy} + y - x - \sqrt{xy} - y}{\sqrt{x} + \sqrt{y}} \cdot \frac{\sqrt{x} + \sqrt{y}}{x - \sqrt{xy} + y} \\ &= \frac{\sqrt{xy}}{x - \sqrt{xy} + y} \end{aligned}$$

B,  $x = (\sqrt{3} - \sqrt{2})^2$  ,  $y = (\sqrt{3} + \sqrt{2})^2$

$$P = \frac{\sqrt{(\sqrt{3} - \sqrt{2})^2 (\sqrt{3} + \sqrt{2})^2}}{5 - 2\sqrt{6} + 5 + 2\sqrt{6} - 1} = \frac{3 - 2}{9} = \frac{1}{9}$$

C,  $x, y \geq 0 \Rightarrow \sqrt{xy} \geq 0$ , (1)

$x - \sqrt{xy} + y - (\sqrt{x} - \sqrt{y})^2 + \sqrt{xy}$  ta có  $x \neq y$

$(\sqrt{x} - \sqrt{y})^2 \geq 0, \sqrt{xy} > 0 \Rightarrow (\sqrt{x} - \sqrt{y})^2 + \sqrt{xy} > 0$  (2)

Từ (1) và (2)  $\Rightarrow P \geq 0$  (\*)

Xét hiệu P-1 ta có  $\frac{\sqrt{xy}}{x - \sqrt{xy} + y} - 1 = \frac{\sqrt{xy} - x - y + \sqrt{xy}}{x - \sqrt{xy} + y} = \frac{2\sqrt{xy} - x - y}{x - \sqrt{xy} + y}$

$$= \frac{-(\sqrt{x} - \sqrt{y})^2}{x - \sqrt{xy} + y} \text{ ta có } -(\sqrt{x} - \sqrt{y}) < 0 \text{ và } x \neq y \text{ (3)}$$

Từ (2) và (3)  $\Rightarrow \frac{-(\sqrt{x} - \sqrt{y})^2}{x - \sqrt{xy} + y} < 0$  hay P-1 < 0 suy ra P < 1

**Bài 47 :**

$$\text{Cho biểu thức } A = \frac{15\sqrt{x} - 11}{x + 2\sqrt{x} - 3} + \frac{3\sqrt{x} - 2}{1 - \sqrt{x}} - \frac{2\sqrt{x} + 3}{\sqrt{x} + 3}$$

a) Rút gọn biểu thức A .

b) Tính giá trị của A khi  $x = \frac{\sqrt{2} - 1}{\sqrt{3 + 2\sqrt{2}}}$

c) Chứng minh rằng:  $A \leq \frac{2}{3}$

**Giải**

a) ĐKXD:  $x \geq 0$  ;  $x \neq 1$

$$\begin{aligned}
 A &= \frac{15\sqrt{x}-11}{(\sqrt{x}+3)(\sqrt{x}-1)} - \frac{3\sqrt{x}-2}{\sqrt{x}-1} - \frac{2\sqrt{x}+3}{\sqrt{x}+3} \\
 &= \frac{15\sqrt{x}-11 - (3\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+3) - (2\sqrt{x}+3)(\sqrt{x}-1)}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+3)} \\
 &= \frac{15\sqrt{x}-11-3x-9\sqrt{x}+2\sqrt{x}+6-2x+2\sqrt{x}-3\sqrt{x}+3}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+3)} \\
 &= \frac{7\sqrt{x}-5x-2}{(\sqrt{x}+3)(\sqrt{x}-1)} = \frac{(2-5\sqrt{x})(\sqrt{x}-1)}{(\sqrt{x}+3)(\sqrt{x}-1)} = \frac{2-5\sqrt{x}}{\sqrt{x}+3}
 \end{aligned}$$

$$\text{b) } x = \frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{3+2\sqrt{2}}} = \frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1} = \frac{(\sqrt{2}-1)^2}{2-1} = (\sqrt{2}-1)^2 \Rightarrow \sqrt{x} = |\sqrt{2}-1| = \sqrt{2}-1$$

$$A = \frac{2-5\sqrt{x}}{\sqrt{x}+3} = \frac{2-5\sqrt{2}+5}{\sqrt{2}-1+3} = \frac{7-5\sqrt{2}}{\sqrt{2}+2} = \frac{24-17\sqrt{2}}{2}$$

$$\text{c) Xét hiệu: } A - \frac{2}{3} = \frac{2-5\sqrt{x}}{\sqrt{x}+3} - \frac{2}{3} = \frac{6-15\sqrt{x}-2\sqrt{x}-6}{3(\sqrt{x}+3)} = \frac{-17\sqrt{x}}{3(\sqrt{x}+3)}$$

Ta có:  $-17\sqrt{x} \leq 0$  và  $3(\sqrt{x}+3) > 0, \forall x \geq 0; x \neq 1$

$$\Rightarrow \frac{-17\sqrt{x}}{3(\sqrt{x}+3)} \leq 0 \Leftrightarrow A - \frac{2}{3} \leq 0 \Leftrightarrow A \leq \frac{2}{3}$$

**Bài 48:** Cho biểu thức  $A = \left( \frac{\sqrt{x}+3}{\sqrt{x}-2} + \frac{\sqrt{x}+2}{3-\sqrt{x}} + \frac{\sqrt{x}+2}{x-5\sqrt{x}+6} \right) : \left( 1 - \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+1} \right)$ ;

Với  $x \geq 0; x \neq 4; x \neq 9$  (\*)

a) Rút gọn biểu thức A;

b) Tìm giá trị của A khi  $x = 6 - 2\sqrt{5}$ ;

c) Với giá trị nào của x thì  $\frac{1}{A}$  đạt giá trị nhỏ nhất? tìm giá trị nhỏ nhất đó?

a) Với điều kiện (\*) ta có:

$$A = \left( \frac{\sqrt{x}+3}{\sqrt{x}-2} - \frac{\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}-3} + \frac{\sqrt{x}+2}{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}-3)} \right) : \left( \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}+1} - \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+1} \right)$$

$$= \frac{x-9-x+4+\sqrt{x}+2}{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}-3)} : \left(\frac{1}{\sqrt{x}+1}\right) = \frac{\sqrt{x}-3}{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}-3)} : \left(\frac{1}{\sqrt{x}+1}\right)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{x}-2} : \frac{1}{\sqrt{x}+1} = \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-2}$$

B, Dễ thấy :  $x = 6 - 2\sqrt{5} = (\sqrt{5}-1)^2$  thoả mãn điều kiện. Khi đó:

c)  $\sqrt{x} = \sqrt{(\sqrt{5}-1)^2} = \sqrt{5}-1.$

Do vậy, giá trị của biểu thức A là:  $\frac{\sqrt{5}-1+1}{\sqrt{5}-1-2} = \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}-3} = \frac{3\sqrt{5}-5}{4}$

Viết lại,  $\frac{1}{A} = 1 - \frac{3}{\sqrt{x}+1}$ . Để  $\frac{1}{A}$  có GTNN thì  $\frac{3}{\sqrt{x}+1}$  có GTLN, hay  $\sqrt{x}+1$

có GTNN. Ta có:  $\sqrt{x}+1 \geq 1$ , dấu "=" xảy ra khi  $x = 0$ .

Giá trị nhỏ nhất của  $\frac{1}{A}$  là  $1 - \frac{3}{\sqrt{0}+1} = 1 - 3 = -2$ , xảy ra khi  $x = 0$ .

**Bài 49 :**

Cho biểu thức:  $A = \left(\frac{x+2}{x\sqrt{x}-1} + \frac{\sqrt{x}}{x+\sqrt{x}+1} + \frac{1}{1-\sqrt{x}}\right) : \frac{\sqrt{x}-1}{2}$

1- Rút gọn biểu thức A.

2- Tính giá trị của A khi  $x = 7 - 2\sqrt{6}$ .

3- Tìm x để biểu thức A đạt giá trị lớn nhất.

**Giải :**

1-

Điều kiện xác định:  $0 \leq x \neq 1$

$$A = \frac{x+2+\sqrt{x}(\sqrt{x}-1)-(x+\sqrt{x}+1)}{x\sqrt{x}-1} \cdot \frac{2}{\sqrt{x}-1}$$

$$= \frac{(\sqrt{x}-2\sqrt{x}+1)2}{(\sqrt{x}-1)^2(x+\sqrt{x}+1)} = \frac{2}{x+\sqrt{x}+1}$$

$$2- A = \frac{2}{(\sqrt{x}+\frac{1}{2})^2 + \frac{3}{4}} \leq \frac{2}{\frac{1}{4} + \frac{3}{4}} = 2$$

Dấu "=" xảy ra  $\Leftrightarrow \sqrt{x} = 0 \Leftrightarrow x = 0$

Vậy giá trị lớn nhất của A là 2 khi  $x = 0$ .

3- Với  $x = 7 - 2\sqrt{6} = (\sqrt{6}-1)^2 \Rightarrow \sqrt{x} = \sqrt{6}-1$

Ta có:  $A = \frac{2}{7-2\sqrt{6}+\sqrt{6}-1+1} = \frac{2}{7-\sqrt{6}}$

$$\text{Bài 50 : } B = \frac{(\sqrt{x}-\sqrt{y})^3 + \frac{2x^2}{\sqrt{x}} + y\sqrt{y}}{x\sqrt{x} + y\sqrt{y}} + \frac{3\sqrt{xy} - 3y}{x-y}, x > 0, y > 0, x \neq y$$

2.

$$\text{Xét: } \frac{(\sqrt{x}-\sqrt{y})^3 + \frac{2x^2}{\sqrt{x}} + y\sqrt{y}}{x\sqrt{x} + y\sqrt{y}} = \frac{(\sqrt{x})^3 - 3x\sqrt{y} + 3\sqrt{xy} - (\sqrt{y})^3 + 2(\sqrt{x})^3 + (\sqrt{y})^3}{(\sqrt{x})^3 + (\sqrt{y})^3}$$

$$= \frac{3(\sqrt{x})^3 - 3x\sqrt{y} + 3\sqrt{xy}}{(\sqrt{x})^3 + (\sqrt{y})^3} = \frac{3\sqrt{x}[(\sqrt{x})^2 - \sqrt{x}\sqrt{y} + (\sqrt{y})^2]}{(\sqrt{x} + \sqrt{y})[(\sqrt{x})^2 - \sqrt{x}\sqrt{y} + (\sqrt{y})^2]} = \frac{3\sqrt{x}}{\sqrt{x} + \sqrt{y}}$$

$$\text{Xét: } \frac{3\sqrt{xy} - 3y}{x-y} = \frac{3\sqrt{y}(\sqrt{x} - \sqrt{y})}{(\sqrt{x} + \sqrt{y})(\sqrt{x} - \sqrt{y})} = \frac{3\sqrt{y}}{\sqrt{x} + \sqrt{y}}$$

$$B = \frac{3\sqrt{x}}{\sqrt{x} + \sqrt{y}} + \frac{3\sqrt{y}}{\sqrt{x} + \sqrt{y}} = \frac{3(\sqrt{x} + \sqrt{y})}{\sqrt{x} + \sqrt{y}} = 3$$

**Đáp số : B = 3**

$$\text{Bài 51 : Cho biểu thức: } P = \left( \sqrt{x} - \frac{1}{\sqrt{x}} \right) : \left( \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}} - \frac{\sqrt{x}-1}{x+\sqrt{x}} \right)$$

a) Rút gọn P

$$\text{b) Tính giá trị của P khi } x = \frac{2}{2+\sqrt{3}}$$

c) Tìm giá trị của x thỏa mãn đẳng thức:  $P \cdot \sqrt{x} = 6\sqrt{x} - 3 - \sqrt{x-4}$ 

$$P = \left( \sqrt{x} - \frac{1}{\sqrt{x}} \right) : \left( \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}} - \frac{\sqrt{x}-1}{x+\sqrt{x}} \right)$$

ĐKXĐ:  $x > 0, x \neq 1$ 

$$P = \left( \frac{x-1}{\sqrt{x}} \right) : \left( \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}} - \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}(\sqrt{x}+1)} \right)$$

$$= \frac{x-1}{\sqrt{x}} : \frac{x-1-\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}(\sqrt{x}+1)} = \frac{x-1}{\sqrt{x}} : \frac{x-\sqrt{x}}{\sqrt{x}(\sqrt{x}+1)} = \frac{x-1}{\sqrt{x}} \cdot \frac{\sqrt{x}(\sqrt{x}+1)}{\sqrt{x}(\sqrt{x}-1)} = \frac{(\sqrt{x}+1)^2}{\sqrt{x}}$$

$$\text{Với } x = \frac{2}{2+\sqrt{3}} \in \text{ĐKXĐ}$$

$$x = 4 - 2\sqrt{3} = (\sqrt{3}-1)^2 \Rightarrow \sqrt{x} = \sqrt{3}-1$$

$$\text{Nên } P = \frac{(\sqrt{3}-1+1)^2}{\sqrt{3}-1} = \frac{3}{\sqrt{3}-1} = \frac{3}{2}(\sqrt{3}+1)$$

$$\text{Bài 52 : Cho biểu thức } P = \frac{a+b}{\sqrt{a}+\sqrt{b}} : \left( \frac{a+b}{a-b} - \frac{b}{b-\sqrt{ab}} + \frac{a}{\sqrt{ab}+a} \right) - \frac{\sqrt{(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2}}{2}$$

Với  $a > 0, b > 0, a \neq b$

A, Rút gọn biểu thức P =?

B, Tìm a và b sao cho  $b = (a+1)^2$  và  $P = -1$

Giải :

$$\begin{aligned}
 P &= \frac{a+b}{\sqrt{a}+\sqrt{b}} : \left[ \frac{a+b}{(\sqrt{a}+\sqrt{b})(\sqrt{a}-\sqrt{b})} - \frac{b}{-\sqrt{b}(\sqrt{a}-\sqrt{b})} + \frac{a}{\sqrt{a}(\sqrt{a}+\sqrt{b})} \right] - \frac{|\sqrt{a}-\sqrt{b}|}{2} \\
 &= \frac{a+b}{\sqrt{a}+\sqrt{b}} : \frac{a\sqrt{ab}+b\sqrt{ab}+ab+b\sqrt{ab}+a\sqrt{ab}-ab}{(a-b)\sqrt{ab}} - \frac{|\sqrt{a}-\sqrt{b}|}{2} \\
 &= \frac{a+b}{\sqrt{a}+\sqrt{b}} : \frac{2\sqrt{ab}(a+b)}{(a-b)\sqrt{ab}} - \frac{|\sqrt{a}-\sqrt{b}|}{2} = \frac{\sqrt{a}-\sqrt{b}}{2} - \frac{|\sqrt{a}-\sqrt{b}|}{2}
 \end{aligned}$$

$$\text{Nếu : } \sqrt{a}-\sqrt{b} > 0 \Leftrightarrow P = \frac{\sqrt{a}-\sqrt{b}}{2} - \frac{\sqrt{a}-\sqrt{b}}{2} = 0$$

$$\text{Nếu : } \sqrt{a}-\sqrt{b} < 0 \Leftrightarrow a < b \Leftrightarrow P = \sqrt{a}-\sqrt{b}$$

$$\text{B, } \sqrt{a}-\sqrt{b} = -1 \Leftrightarrow \sqrt{a}-\sqrt{(a+1)^2} = -1$$

$$\text{Vì } b = (a+1)^2 \Leftrightarrow \sqrt{a}-a-1 = -1 \Leftrightarrow \sqrt{a}(1-\sqrt{a}) = 0 \text{ mà } a > 0 \Leftrightarrow 1-\sqrt{a} = 0 \Leftrightarrow a = 1 \Rightarrow b = 4$$

Vậy  $a=1$  và  $b=4$  thì  $P=-1$

**Bài 53 :**

Cho biểu thức

$$A = \left[ \left( \frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{1}{\sqrt{y}} \right) \frac{2}{\sqrt{x}+\sqrt{y}} + \frac{1}{x} + \frac{1}{y} \right] : \frac{\sqrt{x^3} + y\sqrt{x} + x\sqrt{y} + \sqrt{y^3}}{\sqrt{xy^3} + \sqrt{x^3y}}$$

2) Rút gọn A

$$2) \text{ Tìm } x; y \text{ biết } xy = \frac{1}{36}; A = 5$$

$$\begin{aligned}
 \text{Giải : } A &= \left[ \frac{\sqrt{x}+\sqrt{y}}{\sqrt{xy}} \cdot \frac{2}{\sqrt{x}+\sqrt{y}} + \frac{x+y}{xy} \right] : \frac{(\sqrt{x}+\sqrt{y})(x-\sqrt{xy}+y) + \sqrt{xy}(\sqrt{x}+\sqrt{y})}{\sqrt{xy}(x+y)} \\
 &= \frac{2}{\sqrt{xy}} + \frac{x+y}{xy} : \frac{(\sqrt{x}+\sqrt{y})(x+y-\sqrt{xy}+\sqrt{xy})}{\sqrt{xy}(x+y)} = \frac{2\sqrt{xy}+x+y}{xy} : \frac{(\sqrt{x}+\sqrt{y})(x+y)}{\sqrt{xy}(x+y)} \\
 &= \frac{(\sqrt{x}+\sqrt{y})^2}{xy} : \frac{\sqrt{x}+\sqrt{y}}{\sqrt{xy}} = \frac{(\sqrt{x}+\sqrt{y})^2}{xy} \cdot \frac{\sqrt{xy}}{\sqrt{x}+\sqrt{y}} = \frac{\sqrt{x}+\sqrt{y}}{\sqrt{xy}}
 \end{aligned}$$

$$2, \text{ Tìm } x, y \text{ } xy = \frac{1}{36}, A = 5$$

$$\Leftrightarrow 5 = \frac{\sqrt{x}+\sqrt{y}}{\sqrt{\frac{1}{36}}} \Leftrightarrow 5 = \frac{\sqrt{x}+\sqrt{y}}{\frac{1}{6}} \Leftrightarrow 5 \cdot \frac{1}{6} = \sqrt{x}+\sqrt{y} \Leftrightarrow \frac{5}{6} = \sqrt{x}+\sqrt{y}$$

$$\Rightarrow \sqrt{x} = \frac{5}{6} - \sqrt{y}, (2)$$

$$\text{Từ } xy = \frac{1}{36} \Rightarrow \sqrt{xy} = \sqrt{\frac{1}{36}} \Rightarrow \sqrt{xy} = \frac{1}{6}, (1)$$

$$\text{Thay (2) vào (1) ta có } \sqrt{y} \left( \frac{5}{6} - \sqrt{y} \right) = \frac{1}{6} \Leftrightarrow 5\sqrt{y} - 6y = 1 \Rightarrow -6y + 5\sqrt{y} - 1 = 0$$

$$\text{Đặt } \sqrt{y} = t \geq 0 \Leftrightarrow -6t^2 + 5t - 1 = 0$$

$$\Rightarrow t = \frac{1}{2}, t = \frac{1}{3} \text{ thay vào ta có } \sqrt{y} = \frac{1}{2} \Rightarrow y = \frac{1}{4}$$

$$\sqrt{y} = \frac{1}{3} \Rightarrow y = \frac{1}{9}$$

$$\text{Với } y = \frac{1}{4} \Rightarrow x \frac{1}{4} = \frac{1}{36} \Rightarrow x = \frac{1}{9}$$

$$\text{Với } y = \frac{1}{9} \Rightarrow x \frac{1}{9} = \frac{1}{36} \Rightarrow x = \frac{1}{4}$$

**Bài 54.** Cho biểu thức  $A = \left( \frac{1}{x - \sqrt{x}} + \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x} - 1} \right) : \left( \frac{2}{x - 1} + \frac{1}{\sqrt{x} + 1} \right)$  (với  $x > 0$  và  $x \neq 1$ ).

1) Rút gọn biểu thức A.

2) Chứng minh rằng  $A - 2 > 0$  với mọi  $x$  thỏa mãn điều kiện  $x > 0$  và  $x \neq 1$ .

$$\text{Tính được } \frac{1}{x - \sqrt{x}} + \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x} - 1} = \frac{x + 1}{\sqrt{x}(\sqrt{x} - 1)} \text{ và } \frac{2}{x - 1} + \frac{1}{\sqrt{x} + 1} = \frac{\sqrt{x} + 1}{(\sqrt{x} + 1)(\sqrt{x} - 1)}$$

$$\text{Thực hiện phép chia và tính được } A = \frac{x + 1}{\sqrt{x}}$$

$$+ \text{ Ta có } A - 2 = \frac{(\sqrt{x} - 1)^2}{\sqrt{x}}$$

+ Vì với  $x > 0$  và  $x \neq 1$  nên  $(\sqrt{x} - 1)^2 > 0$  và  $\sqrt{x} > 0$ . Do đó  $A - 2 > 0$

$$\text{Bài 55 : Cho biểu thức } A = \left( \frac{1}{\sqrt{x} + 2} + \frac{1}{\sqrt{x} - 2} \right) \cdot \frac{\sqrt{x} - 2}{\sqrt{x}}$$

a) Tìm điều kiện xác định và rút gọn A.

b) Tìm tất cả các giá trị của  $x$  để  $A > \frac{1}{2}$

c) Tìm tất cả các giá trị của  $x$  để  $B = \frac{7}{3}A$  đạt giá trị nguyên.

c.

$$B = \frac{7}{3} \cdot \frac{2}{\sqrt{x} + 2} = \frac{14}{3\sqrt{x} + 6}. \text{ Vì } x > 0 \text{ nên } 0 < B < \frac{14}{6}$$

Mà B nguyên nên  $B \in \{1; 2\}$

- Nếu  $B=1 \Rightarrow x = \frac{64}{9}$  (TM)

- Nếu  $B=2 \Rightarrow x = \frac{1}{9}$  (TM)

Vậy .....

Bai 56 :: Cho biểu thức:  $P = \frac{2a^2 + 4}{1 - a^3} - \frac{1}{1 + \sqrt{a}} - \frac{1}{1 - \sqrt{a}}$

a) Tìm điều kiện của a để P xác định: P xác định khi  $a \geq 0$  và  $a \neq 1$

b) Rút gọn biểu thức P.

c, Tìm GTLN của P=?

$$\begin{aligned} P &= \frac{2a^2 + 4}{1 - a^3} - \frac{1}{1 + \sqrt{a}} - \frac{1}{1 - \sqrt{a}} = \frac{2a^2 + 4 - (1 - \sqrt{a})(a^2 + a + 1) - (1 + \sqrt{a})(a^2 + a + 1)}{(1 - a)(a^2 + a + 1)} \\ &= \frac{2a^2 + 4 - a^2 - a - 1 + a^2\sqrt{a} + a\sqrt{a} + \sqrt{a} - a - 1 - a^2\sqrt{a} - a\sqrt{a} - \sqrt{a}}{(1 - a)(a^2 + a + 1)} \\ &= \frac{2 - 2a}{(1 - a)(a^2 + a + 1)} = \frac{2}{a^2 + a + 1} \end{aligned}$$

Vậy với  $a \geq 0$  và  $a \neq 1$  thì  $P = \frac{2}{a^2 + a + 1}$

**Bài 57** : Cho biểu thức:

$$P = \left[ 1 - \frac{x - 3\sqrt{x}}{x - 9} \right] : \left[ \frac{\sqrt{x} - 3}{2 - \sqrt{x}} + \frac{\sqrt{x} - 2}{3 + \sqrt{x}} - \frac{9 - x}{x + \sqrt{x} - 6} \right]$$

a. Rút gọn biểu thức P

b. Tìm giá trị của x để  $P = 1$

$$\text{đk} \begin{cases} x \geq 0 \\ x - 9 \neq 0 \\ 2 - \sqrt{x} \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ x \neq 9 \\ x \neq 4 \end{cases}$$

Ta có:  $P = \left[ 1 - \frac{\sqrt{x}(\sqrt{x} - 3)}{(\sqrt{x} + 3)(\sqrt{x} - 3)} \right] : \left[ \frac{(\sqrt{x} - 3)(3 + \sqrt{x}) + (\sqrt{x} - 2)(2 - \sqrt{x}) + 9 - x}{(2 - \sqrt{x})(3 + \sqrt{x})} \right]$

$$\left[ \frac{3}{\sqrt{x} + 3} \right] : \left[ \frac{4\sqrt{x} - x - 4}{(2 - \sqrt{x})(3 + \sqrt{x})} \right] = \left[ \frac{3}{\sqrt{x} + 3} \right] \cdot \left[ \frac{(2 - \sqrt{x})(3 + \sqrt{x})}{-(2 - \sqrt{x})^2} \right]$$

$$= \frac{3}{\sqrt{x} - 2} \quad \text{Vậy } P = \frac{3}{\sqrt{x} - 2}$$

$$\text{Ta thấy } P = 1 \Leftrightarrow \frac{3}{\sqrt{x}-2} = 1 \Leftrightarrow \sqrt{x}-2 = 3 \Leftrightarrow \sqrt{x} = 5 \Leftrightarrow x = 25$$

Vậy với  $x = 25$  thì  $P = 1$

$$\text{Bài 58 : Cho } P = \frac{x^2 - \sqrt{x}}{x + \sqrt{x} + 1} - \frac{3x - 2\sqrt{x}}{\sqrt{x}} + \frac{x-4}{\sqrt{x}-2}$$

A, Rút gọn  $P = ?$

B, Tìm GTNN của  $P = ?$

Rút gọn  $P = x - 3\sqrt{x} + 4$

$$\text{B, } x - 3\sqrt{x} + 4 = \left(\sqrt{x} - \frac{3}{4}\right)^2 + \frac{7}{4} \geq \frac{7}{4} \text{ vậy GTNN của } P = \frac{7}{4} \text{ khi } x = \frac{9}{16}$$

**Bài 59 :** Cho biểu thức:

$$A = \left( \frac{x}{x\sqrt{x}-4\sqrt{x}} - \frac{6}{3\sqrt{x}-6} + \frac{1}{\sqrt{x}+2} \right) : \left( \sqrt{x}-2 + \frac{10-x}{\sqrt{x}+2} \right)$$

a, Tìm điều kiện của  $x$  để  $A$  có nghĩa.

b, Rút gọn  $A$ .

c, Tìm  $x$  để  $A < 2$ .

Điều kiện  $x \geq 0; x \neq 4$

$$\begin{aligned} A &= \left( \frac{x}{x\sqrt{x}-4\sqrt{x}} - \frac{6}{3\sqrt{x}-6} + \frac{1}{\sqrt{x}+2} \right) : \left( \sqrt{x}-2 + \frac{10-x}{\sqrt{x}+2} \right) \\ &= \left[ \frac{x}{\sqrt{x}(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+2)} - \frac{6}{3(\sqrt{x}-2)} + \frac{1}{\sqrt{x}+2} \right] : \frac{x-4+10-x}{\sqrt{x}+2} \\ &= \frac{\sqrt{x}-2(\sqrt{x}+2)+\sqrt{x}-2}{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+2)} : \frac{6}{\sqrt{x}+2} \\ &= \frac{-6}{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+2)} \cdot \frac{\sqrt{x}+2}{6} = \frac{1}{2-\sqrt{x}} \end{aligned}$$

$$\text{Ta có } A < 2 \Leftrightarrow \frac{1}{2-\sqrt{x}} < 2 \text{ và } x \geq 0; x \neq 4$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2-\sqrt{x}} - 2 < 0 \Leftrightarrow \frac{2\sqrt{x}-3}{2-\sqrt{x}} < 0$$

$$+ \text{ Tr- ờng hợp 1: } \begin{cases} 2\sqrt{x}-3 > 0 \\ 2-\sqrt{x} < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > \frac{9}{4} \\ x > 4 \end{cases} \Leftrightarrow x > 4$$

$$+ \text{ Tr- ờng hợp 2: } \begin{cases} 2\sqrt{x}-3 < 0 \\ 2-\sqrt{x} > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < \frac{9}{4} \\ x < 4 \end{cases} \Leftrightarrow x < \frac{9}{4}$$

Kết hợp với điều kiện ta có  $x > 4$  hoặc  $0 \leq x < \frac{9}{4}$  thì  $A < 2$ .

Bài 60 : Chứng minh:  $\left(\frac{x\sqrt{x}+3\sqrt{3}}{x-\sqrt{3x}+3}-2\sqrt{x}\right)\left(\frac{\sqrt{x}+\sqrt{3}}{3-x}\right)=1$  (với  $x \geq 0$  và  $x \neq 3$ ).

Với giả thiết đã cho:  $x \geq 0$  và  $x \neq 3$ , ta có:

$$\frac{x\sqrt{x}+3\sqrt{3}}{x-\sqrt{3x}+3}-2\sqrt{x}=\frac{(\sqrt{x})^3+(\sqrt{3})^3}{(\sqrt{x})^2-\sqrt{x}\sqrt{3}+(\sqrt{3})^2}-2\sqrt{x}=\sqrt{3}-\sqrt{x}$$

$$+\frac{\sqrt{x}+\sqrt{3}}{3-x}=\frac{\sqrt{x}+\sqrt{3}}{(\sqrt{3}-\sqrt{x})(\sqrt{3}+\sqrt{x})}=\frac{1}{\sqrt{3}-\sqrt{x}}$$

$$+\text{Vậy: } \left(\frac{x\sqrt{x}+3\sqrt{3}}{x-\sqrt{3x}+3}-2\sqrt{x}\right)\left(\frac{\sqrt{x}+\sqrt{3}}{3-x}\right)=(\sqrt{3}-\sqrt{x})\cdot\frac{1}{\sqrt{3}-\sqrt{x}}=1$$

Bài 61 : Cho biểu thức  $P=\frac{\sqrt{x}+3}{\sqrt{x}+4}+\frac{\sqrt{x}-2}{\sqrt{x}-4}-\frac{x+9\sqrt{x}-36}{x-16}$

A, Tìm Đk XD và rút gọn P =?

B, Tính giá trị của P với  $x=3-2\sqrt{2}$

C, Tìm giá trị của x để  $P > \frac{1}{3}$

Giải : a, ĐKXD  $x \geq 0, x \neq 16$

$$\frac{\sqrt{x}+3}{\sqrt{x}+4}+\frac{\sqrt{x}-2}{\sqrt{x}-4}-\frac{x+9\sqrt{x}-36}{(\sqrt{x})^2-4^2}=\frac{(\sqrt{x}+3)(\sqrt{x}-4)+(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+4)-(x+9\sqrt{x}-36)}{(\sqrt{x}+4)(\sqrt{x}-4)}$$

$$P==\frac{x-4\sqrt{x}+3\sqrt{x}-12+x+4\sqrt{x}-2\sqrt{x}-8-x-9\sqrt{x}+36}{(\sqrt{x}+4)(\sqrt{x}-4)}=\frac{x-8\sqrt{x}+16}{(\sqrt{x}+4)(\sqrt{x}-4)}$$

$$=\frac{(\sqrt{x}-4)^2}{(\sqrt{x}+4)(\sqrt{x}-4)}=\frac{\sqrt{x}-4}{\sqrt{x}+4}$$

$$B, x=3-2\sqrt{2}=2-2\sqrt{2}+1=(\sqrt{2}-1)^2$$

$$\text{Thay vào P ta đ-ợc } P=\frac{\sqrt{(\sqrt{2}-1)^2-4}}{\sqrt{(\sqrt{2}-1)^2+4}}=\frac{\sqrt{2}-1-4}{\sqrt{2}-1+4}=\frac{\sqrt{2}-5}{\sqrt{2}+3}=\frac{(\sqrt{2}-5)(3-\sqrt{2})}{(3+\sqrt{2})(3-\sqrt{2})}=\frac{3\sqrt{2}-2-15+5\sqrt{2}}{3^2-(\sqrt{2})^2}$$

$$=\frac{8\sqrt{2}-17}{9-2}=\frac{8\sqrt{2}-17}{7}$$

$$C, \text{ Tìm x để } P=\frac{1}{3} \Leftrightarrow \frac{\sqrt{x}-4}{\sqrt{x}+4}=\frac{1}{3} \Leftrightarrow 3(\sqrt{x}-4)=\sqrt{x}+4 \Leftrightarrow 3\sqrt{x}-12=\sqrt{x}+4 \Leftrightarrow 3\sqrt{x}-\sqrt{x}=12+4$$

$$\Leftrightarrow 2\sqrt{x}=16 \Rightarrow \sqrt{x}=8 \Rightarrow x=64$$

Bài 62 : Cho biểu thức

$$P = \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}+6} + \frac{x+16\sqrt{x}}{x-36} - \frac{\sqrt{x}-2}{\sqrt{x}-6}$$

A, Rút gọn P=?

B, Tìm x để P nhận giá trị nguyên ?

C, Tính P với  $x=4-2\sqrt{3}$

Giải : ĐKXD  $x \geq 0, x \neq 36$

$$P = \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}+6} + \frac{x+16\sqrt{x}}{(\sqrt{x})^2-6^2} - \frac{\sqrt{x}-2}{\sqrt{x}-6} = \frac{(\sqrt{x}+1)(\sqrt{x}-6) + x + 4\sqrt{x} - (\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+6)}{(\sqrt{x}+6)(\sqrt{x}-6)}$$

$$A, = \frac{x-6\sqrt{x}+\sqrt{x}-6+x+16\sqrt{x}-x-6\sqrt{x}+2\sqrt{x}+12}{(\sqrt{x}+6)(\sqrt{x}-6)} = \frac{x+7\sqrt{x}+6}{(\sqrt{x}+6)(\sqrt{x}-6)}$$

$$= \frac{(\sqrt{x}+1)(\sqrt{x}+6)}{(\sqrt{x}+6)(\sqrt{x}-6)} = \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-6}$$

B, Để P nhận giá trị nguyên thì

$$\frac{\sqrt{x}-6+7}{\sqrt{x}-6} = \frac{\sqrt{x}-6}{\sqrt{x}-6} + \frac{7}{\sqrt{x}-6} = 1 + \frac{7}{\sqrt{x}-6}$$

Vì  $1 \in \mathbb{Z}$ , nên  $\frac{7}{\sqrt{x}-6} \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow \sqrt{x}-6 = u(7) = \pm 1, \pm 7$

$$*\sqrt{x}-6=1 \Rightarrow \sqrt{x}=7 \Rightarrow x=49$$

$$*\sqrt{x}-6=-1 \Rightarrow \sqrt{x}=5 \Rightarrow x=25$$

$$*\sqrt{x}-6=7 \Rightarrow \sqrt{x}=13 \Rightarrow x=169$$

$$*\sqrt{x}-6=-7 \Rightarrow \sqrt{x}=-1, \text{Loại}$$

$$C, x=4-2\sqrt{3}=3-2\sqrt{3}+1=(\sqrt{3}-1)^2$$

Thay vào ta có

$$P = \frac{\sqrt{(\sqrt{3}-1)^2+1}}{\sqrt{(\sqrt{3}-1)^2-6}} = \frac{\sqrt{3}-1+1}{\sqrt{3}-1-6} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}-7} = \frac{\sqrt{3}(\sqrt{3}+7)}{(\sqrt{3}-7)(\sqrt{3}+7)} = \frac{3+7\sqrt{3}}{3-49} = \frac{-(3+7\sqrt{7})}{46}$$

$$\text{Bài 63: Cho biểu thức } P = \frac{x^2-\sqrt{x}}{x+\sqrt{x}+1} - \frac{x-\sqrt{x}}{\sqrt{x}} + \frac{x-4}{\sqrt{x}+2}$$

A, Rút gọn biểu thức P=?

B, Tìm giá trị của x để P=0

C, Tính :  $\frac{2009.2010.2011.2012}{(2008.2012-2006)(2008.2003+12.2009)}$

Giải : a, Đ/k  $x > 0$

$$\begin{aligned}
 P &= \frac{\sqrt{x^4} - \sqrt{x}}{x + \sqrt{x} + 1} - \frac{\sqrt{x^2} - \sqrt{x}}{\sqrt{x}} + \frac{\sqrt{x^2} - 2^2}{\sqrt{x} + 2} = \frac{\sqrt{x}(\sqrt{x^3} - 1)}{x + \sqrt{x} + 1} - \frac{\sqrt{x}(\sqrt{x} - 1)}{\sqrt{x}} + \frac{(\sqrt{x} + 2)(\sqrt{x} - 2)}{\sqrt{x} + 2} \\
 &= \frac{\sqrt{x}(\sqrt{x} - 1)(x + \sqrt{x} + 1)}{x + \sqrt{x} + 1} - (\sqrt{x} - 1) + \sqrt{x} - 2 = x - \sqrt{x} - \sqrt{x} + 1 + \sqrt{x} - 2 \\
 &= x - \sqrt{x} - 1
 \end{aligned}$$

B, Tìm x để  $P = 0 \Leftrightarrow x - \sqrt{x} - 1 = 0$  đặt  $\sqrt{x} = t \geq 0$  PT trở thành

$$\Delta = (-1)^2 - 4 \cdot (-1) = 1 + 4 = 5 > 0$$

$$t^2 - t - 1 = 0 \quad t_1 = \frac{-(-1) + \sqrt{5}}{2} = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}, \text{nhân}$$

$$t_2 = \frac{-(-1) - \sqrt{5}}{2} = \frac{1 - \sqrt{5}}{2} < 0, \text{loại}$$

Thay vào  $x = \pm \sqrt{\frac{1 + \sqrt{5}}{2}}$

$$\text{C, Tính : } x = \frac{2009 \cdot 2010 \cdot 2011 \cdot 2012}{(2008 \cdot 2012 - 2006)(2008 \cdot 2003 + 12 \cdot 2009)} = \frac{2009 \cdot 2010 \cdot 2011 \cdot 2012}{(4040096 - 2006)(4022024 + 2408)}$$

$$\frac{2009 \cdot 2010 \cdot 2011 \cdot 2012}{4038090 \cdot 4046132} = \frac{2009 \cdot 2010 \cdot 2011 \cdot 2012}{2009 \cdot 2010 \cdot 2011 \cdot 2012} = 1$$

Thay vào ta có  $P = 1 - \sqrt{1} - 1 = -1$

**Bài 64 ;**

$$\text{Cho biểu thức: } A(x, y) = \frac{(x\sqrt{y} + y)(\sqrt{x} + \sqrt{y})}{x - y} \sqrt{\frac{y(x + y) - 2\sqrt{xy}^3}{x(x + 2\sqrt{y}) + y}}$$

1/ Tìm điều kiện của x, y để A(x, y) có nghĩa.

2/ Chứng minh rằng biểu thức A(x, y) không phụ thuộc vào x.

A(x, y) có nghĩa khi:  $x \geq 0, y \geq 0$  và  $x \neq y$

$$\begin{aligned}
 A(x, y) &= \frac{(x\sqrt{y} + y)(\sqrt{x} + \sqrt{y})}{x - y} \sqrt{\frac{y(x + y) - 2\sqrt{xy}^3}{x(x + 2\sqrt{y}) + y}} = \frac{\sqrt{y}(x + \sqrt{y})(\sqrt{x} + \sqrt{y})}{(\sqrt{x} + \sqrt{y})(\sqrt{x} - \sqrt{y})} \sqrt{\frac{xy + y^2 - 2y\sqrt{xy}}{x^2 + 2x\sqrt{y} + y}} \\
 &= \frac{\sqrt{y}(x + \sqrt{y})}{\sqrt{x} - \sqrt{y}} \sqrt{\frac{(\sqrt{xy} - y)^2}{(x + \sqrt{y})^2}} = \frac{\sqrt{y}(x + \sqrt{y})}{\sqrt{x} - \sqrt{y}} \cdot \frac{\sqrt{xy} - y}{x + \sqrt{y}} = \frac{\sqrt{y}}{\sqrt{x} - \sqrt{y}} \cdot \sqrt{y}(\sqrt{x} - \sqrt{y}) = y
 \end{aligned}$$

Vậy A(x, y) không phụ thuộc vào biến x

**Bài 65 :** . Rút gọn các biểu thức sau:

$$P = (1 - \sqrt{x}) \left( \frac{1}{1 - \sqrt{x}} - \frac{1}{\sqrt{x}} \right) \left( \frac{x + \sqrt{x}}{2\sqrt{x} - 1} - 1 \right)$$

a. Rút gọn P.

b. Tính giá trị của  $P$  khi  $x = 7 - 4\sqrt{3}$ .

c. Chứng minh:  $P > 1$

$$P = (1 - \sqrt{x}) \left( \frac{1}{1 - \sqrt{x}} - \frac{1}{\sqrt{x}} \right) \left( \frac{x + \sqrt{x}}{2\sqrt{x} - 1} - 1 \right) = (1 - \sqrt{x}) \left( \frac{\sqrt{x} - 1 + \sqrt{x}}{(1 - \sqrt{x})\sqrt{x}} \right) \left( \frac{x + \sqrt{x} - (2\sqrt{x} - 1)}{2\sqrt{x} - 1} \right) \quad \text{ĐK: } x \geq 0; x \neq 1$$

$$= \frac{2\sqrt{x} - 1}{\sqrt{x}} \cdot \frac{x - \sqrt{x} + 1}{2\sqrt{x} - 1} = \frac{x - \sqrt{x} + 1}{\sqrt{x}}$$

$$x = 7 - 4\sqrt{3} \Leftrightarrow \sqrt{x} = 2 - \sqrt{3}$$

$$P = \frac{7 - 4\sqrt{3} - 2 + \sqrt{3} + 1}{2 - \sqrt{3}} = \frac{6 - 2\sqrt{3}}{2 - \sqrt{3}} = 3$$

$$P = \frac{x - \sqrt{x} + 1}{\sqrt{x}} = \sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}} - 1 \geq 2\sqrt{\sqrt{x} \cdot \frac{1}{\sqrt{x}}} - 1 \Leftrightarrow P \geq 1$$

Vậy  $P > 1$

Dấu “=” xảy ra khi:  $\sqrt{x} = \frac{1}{\sqrt{x}} \Leftrightarrow x = 1$ ; mà  $x = 1$  không thuộc TXĐ

**Bài 66:** Cho

$$P = \frac{x\sqrt{x} + 5\sqrt{x} - 12}{x - \sqrt{x} - 6} - \frac{2(\sqrt{x} - 3)}{\sqrt{x} + 2} + \frac{\sqrt{x} + 3}{3 - \sqrt{x}}$$

a) Tìm ĐKXĐ và rút gọn  $P$

b) Tìm giá trị nhỏ nhất của  $P$

Giải: Câu rút gọn ta được  $P = \frac{x + 12}{\sqrt{x} + 2}$

B, Tìm GTNN của  $P$

$$P = \frac{x - 4 + 16}{\sqrt{x} + 2} = \frac{x - 4}{\sqrt{x} + 2} + \frac{16}{\sqrt{x} + 2} = \sqrt{x} - 2 + \frac{16}{\sqrt{x} + 2} = \sqrt{x} + 2 + \frac{16}{\sqrt{x} + 2} - 4$$

Áp dụng bất đẳng thức cô si ta có  $\sqrt{x} + 2 + \frac{16}{\sqrt{x} + 2} \geq 2\sqrt{(\sqrt{x} + 2) \cdot \frac{16}{\sqrt{x} + 2}} \Leftrightarrow \sqrt{x} + 2 + \frac{16}{\sqrt{x} + 2} \geq 2 \cdot 4$

$$\Leftrightarrow \sqrt{x} + 2 + \frac{16}{\sqrt{x} + 2} - 4 \geq 8 - 4 \Leftrightarrow \sqrt{x} + 2 + \frac{16}{\sqrt{x} + 2} - 4 \geq 4$$

Vậy GTNN của  $P = 4$

$$\text{Bài 67: Rút gọn biểu thức } B = \left( \frac{a\sqrt{a} - 3}{a - 2\sqrt{a} - 3} - \frac{2(\sqrt{a} - 3)}{\sqrt{a} + 1} + \frac{\sqrt{a} + 3}{3 - \sqrt{a}} \right) : \left( \frac{a + 8}{a - 1} \right)$$

Tính giá trị biểu thức của P với  $x = \sqrt{7 - 4\sqrt{3}}$  với  $a \geq 0; a \neq 9, a \neq 1$

$$\begin{aligned} B &= \left[ \frac{a\sqrt{a}-3}{(\sqrt{a}+1)(\sqrt{a}-3)} - \frac{2(\sqrt{a}-3)}{\sqrt{a}+1} - \frac{\sqrt{a}+3}{\sqrt{a}-3} \right] \cdot \frac{a-1}{a+8} \\ &= \frac{a\sqrt{a}-3-2(\sqrt{a}-3)(\sqrt{a}-3)-(\sqrt{a}+3)(\sqrt{a}+1)}{(\sqrt{a}+1)(\sqrt{a}-3)} \cdot \frac{a-1}{a+8} \\ &= \frac{a\sqrt{a}-3-2a+12\sqrt{a}-18-a-\sqrt{a}-3\sqrt{a}-3}{(\sqrt{a}+1)(\sqrt{a}-3)} \cdot \frac{a-1}{a+8} \\ &= \frac{a\sqrt{a}-3a+8\sqrt{a}-24}{(\sqrt{a}+1)(\sqrt{a}-3)} \cdot \frac{a-1}{a+8} = \frac{a(\sqrt{a}-3)+8(\sqrt{a}-3)}{(\sqrt{a}+1)(\sqrt{a}-3)} \cdot \frac{a-1}{a+8} \\ &= \frac{(\sqrt{a}-3)(a+8)(\sqrt{a}+1)(\sqrt{a}-1)}{(\sqrt{a}+1)(\sqrt{a}-3)(a+8)} = (\sqrt{a}-1) \end{aligned}$$

Điều kiện:  $a \geq 0, a \neq 9, a \neq 1$

### Bài 68 :

Cho biểu thức 
$$M = 1 - \left[ \frac{2x-1+\sqrt{x}}{1-x} + \frac{2x\sqrt{x}+x-\sqrt{x}}{1+x\sqrt{x}} \right] \cdot \left[ \frac{(x-\sqrt{x})(1-\sqrt{x})}{2\sqrt{x}-1} \right]$$

- Tìm các giá trị của x để biểu thức có nghĩa. Rút gọn M.
- Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức (2010 - M) khi  $x \geq 4$ .
- Tìm các số nguyên x để giá trị của M cũng là số nguyên.

**Bài 69 :** Cho các biểu thức:

$$A = \sqrt{\frac{8+\sqrt{15}}{2}} + \sqrt{\frac{8-\sqrt{15}}{2}}$$

$$B = \frac{x^2 + \sqrt{x}}{x - \sqrt{x} + 1} + 1 - \frac{2x + \sqrt{x}}{\sqrt{x}} \quad (\text{với } x > 0)$$

- Rút gọn A; B.
- Tìm x để B = 2.

a) Rút gọn

$$A = \frac{\sqrt{(\sqrt{15}+1)^2}}{2} + \frac{\sqrt{(\sqrt{15}-1)^2}}{2} = \frac{(\sqrt{15}+1)+(\sqrt{15}-1)}{2} = \sqrt{15}$$

$$B = \frac{x^2 + \sqrt{x}}{x - \sqrt{x} + 1} + 1 - \frac{2x + \sqrt{x}}{\sqrt{x}} \quad (\text{với } x > 0) = \frac{\sqrt{x}(\sqrt{x^3} + 1)}{x - \sqrt{x} + 1} + 1 - \frac{\sqrt{x}(2\sqrt{x} + 1)}{\sqrt{x}}$$

$$= \sqrt{x}(\sqrt{x} + 1) + 1 - (2\sqrt{x} + 1) = x + \sqrt{x} + 1 - 2\sqrt{x} - 1 = x - \sqrt{x}$$

b) Tìm x để B = 2.  $B = 2 \Leftrightarrow x - \sqrt{x} - 2 = 0$

$$\Leftrightarrow x - 2\sqrt{x} + \sqrt{x} - 2 = 0 \Leftrightarrow (x - 2\sqrt{x}) + (\sqrt{x} - 2) = 0$$

$$\Leftrightarrow (\sqrt{x} - 2)(\sqrt{x} + 1) = 0 \Leftrightarrow \sqrt{x} - 2 = 0 \quad (\text{vì } \sqrt{x} + 1 > 0) \Leftrightarrow x = 4$$

### Bài 70:

Cho biểu thức:  $Q = \left( \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-2} - \frac{x-\sqrt{x}-1}{x-2\sqrt{x}} + \frac{2(x-1)}{\sqrt{x}-1} \right) : \left( \frac{\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}+1} - \frac{x-5}{x-\sqrt{x}-2} \right)$  với  $x > 0; x \neq 4$

a. Rút gọn Q

b. Chứng minh rằng  $Q > 2$ .

: Cho biểu thức

$$P = \frac{(\sqrt{x} + \sqrt{y})^2 - 4\sqrt{xy}}{\sqrt{x} - \sqrt{y}} - \frac{x\sqrt{y} + y\sqrt{x}}{\sqrt{xy}}$$

a) Tìm điều kiện để P có nghĩa?

b) Khi P có nghĩa, chứng tỏ P không phụ thuộc vào x

$$P = \frac{(\sqrt{x} + \sqrt{y})^2 - 4\sqrt{xy}}{\sqrt{x} - \sqrt{y}} - \frac{x\sqrt{y} + y\sqrt{x}}{\sqrt{xy}}$$

a) Điều kiện để P có nghĩa

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ y > 0 \\ \sqrt{x} - \sqrt{y} \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ y > 0 \\ x \neq y \end{cases}$$

b) Khi  $x > 0; y > 0; x \neq y$

$$P = \frac{(\sqrt{x} - \sqrt{y})^2}{\sqrt{x} - \sqrt{y}} - \frac{\sqrt{xy}(\sqrt{x} + \sqrt{y})}{\sqrt{xy}} = \sqrt{x} - \sqrt{y} - \sqrt{x} - \sqrt{y} = -2\sqrt{y}$$

Không phụ thuộc vào x

### Bài 71 :

1- So sánh:  $\frac{1}{\sqrt{7}-\sqrt{6}}$  và  $\frac{3}{\sqrt{6}-\sqrt{3}} + \frac{4}{\sqrt{7}+\sqrt{3}}$

1- So sánh:  $\frac{1}{\sqrt{7}-\sqrt{6}}$  và  $\frac{3}{\sqrt{6}-\sqrt{3}} + \frac{4}{\sqrt{7}+\sqrt{3}}$

Ta có:  $\frac{1}{\sqrt{7}-\sqrt{6}} = \frac{\sqrt{7}+\sqrt{6}}{7-6} = \sqrt{7}+\sqrt{6}$

$$\frac{3}{\sqrt{6}-\sqrt{3}} + \frac{4}{\sqrt{7}+\sqrt{3}} = \frac{3(\sqrt{6}+\sqrt{3})}{6-3} + \frac{4(\sqrt{7}-\sqrt{3})}{7-3} = \sqrt{6}+\sqrt{3}+\sqrt{7}-\sqrt{3} = \sqrt{7}+\sqrt{6}$$

Do đó:  $\frac{1}{\sqrt{7}-\sqrt{6}} = \frac{3}{\sqrt{6}-\sqrt{3}} + \frac{4}{\sqrt{7}+\sqrt{3}}$

1. Cho biểu thức  $A = \left( \frac{x-y}{\sqrt{x}-\sqrt{y}} + \frac{\sqrt{x^3}-\sqrt{y^3}}{y-x} \right) : \frac{(\sqrt{x}-\sqrt{y})^2 + \sqrt{xy}}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}$  ( $x \geq 0; y \geq 0; x \neq y$ )

a, Rút gọn biểu thức A.

b, So sánh A và  $\sqrt{A}$

$$= \left( \frac{x-y}{\sqrt{x}-\sqrt{y}} + \frac{\sqrt{x^3}-\sqrt{y^3}}{y-x} \right) : \frac{(\sqrt{x}-\sqrt{y})^2 + \sqrt{xy}}{\sqrt{x}+\sqrt{y}} \quad (x \geq 0; y \geq 0; x \neq y)$$

$$= \left( \frac{(\sqrt{x}+\sqrt{y})(\sqrt{x}-\sqrt{y})}{\sqrt{x}-\sqrt{y}} - \frac{(\sqrt{x}-\sqrt{y})(x+y+\sqrt{xy})}{(\sqrt{x}+\sqrt{y})(\sqrt{x}-\sqrt{y})} \right) : \frac{x-2\sqrt{xy}+y+\sqrt{xy}}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}$$

$$= \left( \sqrt{x}+\sqrt{y} - \frac{x+y+\sqrt{xy}}{\sqrt{x}+\sqrt{y}} \right) : \frac{x-\sqrt{xy}+y}{\sqrt{x}+\sqrt{y}} = \frac{x+y+2\sqrt{xy}-(x+y+\sqrt{xy})}{\sqrt{x}+\sqrt{y}} \cdot \frac{\sqrt{x}+\sqrt{y}}{x-\sqrt{xy}+y} = \frac{\sqrt{xy}}{x-\sqrt{xy}+y}$$

Bài 72 :

a) Rút gọn biểu thức:  $P(x) = \frac{x^2 - \sqrt{x}}{x + \sqrt{x} + 1} - \frac{2x + \sqrt{x}}{\sqrt{x}} + \frac{2(x-1)}{\sqrt{x}-1}$

Tìm x để  $\frac{P(x)}{2012\sqrt{x}}$  đạt giá trị nhỏ nhất

3)a)  $\begin{cases} x > 0 \\ \sqrt{x}-1 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ x \neq 1 \end{cases}$

$$x - \sqrt{x} + 1 = x - 2 \cdot \frac{1}{2} \sqrt{x} + \frac{1}{4} + \frac{3}{4} = \left( \sqrt{x} - \frac{1}{2} \right)^2 + \frac{3}{4} \geq \frac{3}{4} \quad \forall x > 0; x \neq 1$$

$$\rightarrow P(x) = \frac{x^2 - \sqrt{x}}{x + \sqrt{x} + 1} - \frac{2x + \sqrt{x}}{\sqrt{x}} + \frac{2(x-1)}{\sqrt{x}-1}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{\sqrt{x}(\sqrt{x^3}-1)}{x+\sqrt{x}+1} - \frac{\sqrt{x}(2\sqrt{x}+1)}{\sqrt{x}} + \frac{2(\sqrt{x}+1)(\sqrt{x}-1)}{\sqrt{x}-1} \\
&= \sqrt{x}(\sqrt{x}-1) - (2\sqrt{x}+1) + 2(\sqrt{x}+1) \\
&= x - \sqrt{x} - 2\sqrt{x} - 1 + 2\sqrt{x} + 2 \\
&= x - \sqrt{x} + 1
\end{aligned}$$

$$b) \frac{P(x)}{2012\sqrt{x}} = \frac{x - \sqrt{x} + 1}{2012\sqrt{x}} = \frac{\sqrt{x}}{2012} - \frac{1}{2012} + \frac{1}{2012\sqrt{x}}$$

Áp dụng bất đẳng thức Cô si cho hai số không âm  $\frac{\sqrt{x}}{2012}$  và  $\frac{1}{2012\sqrt{x}}$ , ta có:

$$\frac{\sqrt{x}}{2012} + \frac{1}{2012\sqrt{x}} \geq 2\sqrt{\frac{\sqrt{x}}{2012} \cdot \frac{1}{2012\sqrt{x}}} = 2\sqrt{\frac{1}{2012^2}} = 2 \cdot \frac{1}{2012} = \frac{1}{1006}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\sqrt{x}}{2012} + \frac{1}{2012\sqrt{x}} - \frac{1}{2012} \geq \frac{1}{1006} - \frac{1}{2012} = \frac{1}{2012}$$

$$\Rightarrow \text{GTNN của } \frac{P(x)}{2012\sqrt{x}} \text{ là } \frac{1}{2012}$$

Dấu “=” xảy ra khi và chỉ khi:

$$\Leftrightarrow \frac{\sqrt{x}}{2012} + \frac{1}{2012\sqrt{x}} = \frac{1}{1006} \Leftrightarrow \frac{x+1}{2012\sqrt{x}} = \frac{1}{1006}$$

$$\Leftrightarrow 1006(x+1) = 2012\sqrt{x} \Leftrightarrow 1006x - 2012\sqrt{x} + 1006 = 0$$

$$\Leftrightarrow 1006(\sqrt{x}-1) = 0 \Leftrightarrow \sqrt{x}-1 = 0 \Leftrightarrow x = 1$$

**Bài 73 :** Cho biểu thức  $P = \left( \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1} - \frac{1}{x-\sqrt{x}} \right) : \left( \frac{1}{\sqrt{x}+1} + \frac{2}{x-1} \right)$

a) Tìm điều kiện của x để P xác định rồi rút gọn P.

b) Tính giá trị của P khi  $x = 6 - 2\sqrt{5}$

c) Tìm các giá trị của x để  $P < 0$

ĐKXD:  $x > 0; x \neq 1$ .

Với ĐK đó ta có:

$$P = \left[ \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1} - \frac{1}{\sqrt{x}(\sqrt{x}-1)} \right] : \left[ \frac{1}{\sqrt{x}+1} + \frac{2}{(\sqrt{x}+1)(\sqrt{x}-1)} \right]$$

$$P = \frac{x-1}{\sqrt{x}(\sqrt{x}-1)} : \frac{\sqrt{x}-1+2}{(\sqrt{x}+1)(\sqrt{x}-1)}$$

$$P = \frac{x-1}{\sqrt{x}(\sqrt{x}-1)} \cdot \frac{(\sqrt{x}+1)(\sqrt{x}-1)}{\sqrt{x}+1}$$

$$P = \frac{x-1}{\sqrt{x}}$$

Ta có  $x = 6 - 2\sqrt{5} = (\sqrt{5}-1)^2$  (TMĐK)

$$\Rightarrow \sqrt{x} = |\sqrt{5}-1| = \sqrt{5}-1$$

$$\text{Vậy } P = \frac{6-2\sqrt{5}-1}{\sqrt{5}-1} = \frac{5-2\sqrt{5}}{\sqrt{5}-1} = \frac{(5-2\sqrt{5})(\sqrt{5}+1)}{5-1} = \frac{3\sqrt{5}-5}{4}$$

Với  $x > 0; x \neq 1$ , ta có:  $P < 0 \Leftrightarrow \frac{x-1}{\sqrt{x}} < 0$

$$\Leftrightarrow x-1 < 0 \Leftrightarrow x < 1$$

Kết hợp ĐKXD ta có với  $0 < x < 1$  thì  $P < 0$ .

b) Rút gọn biểu thức sau :  $\left( \frac{x-y}{\sqrt{x}-\sqrt{y}} - \frac{x\sqrt{x}-y\sqrt{y}}{x-y} \right) : \frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}$  ( $x \geq 0; y \geq 0; x \neq y$ )

b)

$$\begin{aligned} & \left( \frac{x-y}{\sqrt{x}-\sqrt{y}} - \frac{x\sqrt{x}-y\sqrt{y}}{x-y} \right) : \frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{y}} \\ &= \left[ \frac{(\sqrt{x}+\sqrt{y})(\sqrt{x}-\sqrt{y})}{\sqrt{x}-\sqrt{y}} - \frac{(\sqrt{x}-\sqrt{y})(x+\sqrt{xy}+y)}{(\sqrt{x}-\sqrt{y})(\sqrt{x}+\sqrt{y})} \right] \cdot (\sqrt{x}+\sqrt{y}) \\ &= \left( \sqrt{x}+\sqrt{y} - \frac{x+\sqrt{xy}+y}{\sqrt{x}+\sqrt{y}} \right) (\sqrt{x}+\sqrt{y}) \\ &= x+2\sqrt{xy}+y-x-\sqrt{xy}-y = \sqrt{xy} \end{aligned}$$

Bài 74 : Rút gọn biểu thức:

$$P = \frac{x+2}{x\sqrt{x}-1} + \frac{\sqrt{x}+1}{x+\sqrt{x}+1} - \frac{\sqrt{x}+1}{x-1}$$

$$P = \frac{x+2}{x\sqrt{x}-1} + \frac{\sqrt{x}+1}{x+\sqrt{x}+1} - \frac{\sqrt{x}+1}{x-1}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{x+2}{(\sqrt{x}-1)(x+\sqrt{x}+1)} + \frac{\sqrt{x}+1}{x+\sqrt{x}+1} - \frac{1}{\sqrt{x}-1} \\
&= \frac{x+2}{(\sqrt{x}-1)(x+\sqrt{x}+1)} + \frac{x-1}{(\sqrt{x}-1)(x+\sqrt{x}+1)} - \frac{x+\sqrt{x}+1}{(\sqrt{x}-1)(x+\sqrt{x}+1)} \\
&= \frac{x-\sqrt{x}}{(\sqrt{x}-1)(x+\sqrt{x}+1)} = \frac{\sqrt{x}}{x+\sqrt{x}+1}
\end{aligned}$$

**Bài 75 :** Cho biểu thức  $A = \left( \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+1} - \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1} \right) \left( \frac{1}{2\sqrt{x}} - \frac{\sqrt{x}}{2} \right)^2$

a. Tìm điều kiện của x để biểu thức A có nghĩa.

b. Rút gọn biểu thức A.

$$x > 0, x \neq 1$$

b

$$\begin{aligned}
A &= \left( \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+1} - \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1} \right) \left( \frac{1}{2\sqrt{x}} - \frac{\sqrt{x}}{2} \right)^2 = \left( \frac{(\sqrt{x}-1)^2 - (\sqrt{x}+1)^2}{x-1} \right) \left( \frac{1-x}{2\sqrt{x}} \right)^2 \\
&= \frac{4\sqrt{x} \cdot (1-x)^2}{1-x} \cdot \frac{1-x}{4x} = \frac{1-x}{\sqrt{x}}
\end{aligned}$$

**Bài 76 :** Cho biểu thức:  $A = \frac{2\sqrt{x}-9}{x-5\sqrt{x}+6} - \frac{\sqrt{x}+3}{\sqrt{x}-2} - \frac{2\sqrt{x}+1}{3-\sqrt{x}}$

a) Rút gọn biểu thức A

b) Tìm x để  $A < 1$ .

c) Tìm giá trị nguyên của x để giá trị t-ong ứng của A cũng là số nguyên.

**Bài 77:** Cho biểu thức:  $B = \left( \frac{1-x\sqrt{x}}{\sqrt{x}-x} + 1 \right) \left( \frac{1+x\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}} - \sqrt{x} \right) : \frac{(1-x)^3}{1+\sqrt{x}}$

a) Rút gọn B

b) Với x = ? thì  $B = \frac{-1}{2}$

**Bài 78 :** Cho biểu thức  $A = \left( \frac{\sqrt{x}+3}{\sqrt{x}-2} + \frac{\sqrt{x}+2}{3-\sqrt{x}} + \frac{\sqrt{x}+2}{x-5\sqrt{x}+6} \right) : \left( 1 - \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+1} \right)$ ;

Với  $x \geq 0; x \neq 4; x \neq 9$  (\*)

a) Rút gọn biểu thức A;

b) Tìm giá trị của A khi  $x = 6 - 2\sqrt{5}$ ;

c) Với giá trị nào của x thì  $\frac{1}{A}$  đạt giá trị nhỏ nhất? tìm giá trị nhỏ nhất đó?

a) Với điều kiện (\*) ta có:

$$\begin{aligned}
 A &= \left( \frac{\sqrt{x}+3}{\sqrt{x}-2} - \frac{\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}-3} + \frac{\sqrt{x}+2}{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}-3)} \right) : \left( \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}+1} - \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+1} \right) \\
 &= \frac{x-9-x+4+\sqrt{x}+2}{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}-3)} : \left( \frac{1}{\sqrt{x}+1} \right) = \frac{\sqrt{x}-3}{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}-3)} : \left( \frac{1}{\sqrt{x}+1} \right) \\
 &= \frac{1}{\sqrt{x}-2} : \frac{1}{\sqrt{x}+1} = \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-2}
 \end{aligned}$$

B, Để thấy :  $x = 6 - 2\sqrt{5} = (\sqrt{5}-1)^2$  thỏa mãn điều kiện. Khi đó:  $\sqrt{x} = \sqrt{(\sqrt{5}-1)^2} = \sqrt{5}-1$ .

Do vậy, giá trị của biểu thức A là:  $\frac{\sqrt{5}-1+1}{\sqrt{5}-1-2} = \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}-3} = -\frac{3\sqrt{5}+5}{4}$

c) Viết lại,  $\frac{1}{A} = 1 - \frac{3}{\sqrt{x}+1}$ . Để  $\frac{1}{A}$  có GTNN thì  $\frac{3}{\sqrt{x}+1}$  có GTLN, hay  $\sqrt{x}+1$  có GTNN

Ta có:  $\sqrt{x}+1 \geq 1$ , dấu "=" xảy ra khi  $x = 0$ .

Giá trị nhỏ nhất của  $\frac{1}{A}$  là  $1 - \frac{3}{\sqrt{0}+1} = 1 - 3 = -2$ , xảy ra khi  $x = 0$ .

### **Bài 79 :**

1. Cho biểu thức:

$$A = \left( \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{xy}+1} + \frac{\sqrt{xy}+\sqrt{x}}{1-\sqrt{xy}} + 1 \right) : \left( 1 - \frac{\sqrt{xy}+\sqrt{x}}{\sqrt{xy}-1} - \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{xy}+1} \right)$$

a. Rút gọn biểu thức. Ta được  $A=1$

b. Cho  $\frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{1}{\sqrt{y}} = 6$  Tìm Max A.

### **Bài 80:** Rút gọn biểu thức:

$$a \ A = (\sqrt{3}-1) \sqrt{6+2\sqrt{2} \cdot \sqrt{3-\sqrt{2+\sqrt{12}+\sqrt{18}-\sqrt{128}}}}$$

**Bài 81 :** Cho biểu thức :  $A = \left( \frac{\sqrt{x}}{2} - \frac{1}{2\sqrt{x}} \right) \left( \frac{x-\sqrt{x}}{\sqrt{x}+1} - \frac{x+\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1} \right) \sim$

a) Rút gọn biểu thức A.

b) Tìm giá trị của x để  $A > -6$ .

### **Bài 82 :** Cho biểu thức:

$$P = \frac{x\sqrt{x}-3}{x-2\sqrt{x}-3} - \frac{2(\sqrt{x}-3)}{\sqrt{x}+1} + \frac{\sqrt{x}+3}{3-\sqrt{x}}$$

A, Rút gọn biểu thức P.

$$P = \frac{x+4}{\sqrt{x}+1}$$

B, Tính giá trị của P với  $x = 14 - 6\sqrt{5}$

C, Tìm GTNN của P.

$$P = \frac{x+4}{\sqrt{x+1}} = \frac{x-1+5}{\sqrt{x+1}} = \frac{x-1}{\sqrt{x+1}} + \frac{5}{\sqrt{x+1}} = \sqrt{x-1} + \frac{5}{\sqrt{x+1}}$$

$$= \sqrt{x+1} + \frac{5}{\sqrt{x+1}} - 2$$

Áp dụng bất đẳng thức cô-si ta có

$$\sqrt{x+1} + \frac{5}{\sqrt{x+1}} \geq 2\sqrt{(\sqrt{x+1}) \cdot \frac{5}{\sqrt{x+1}}} = 2\sqrt{5} \text{ trừ hai vế cho } -2 \text{ ta có}$$

$$\sqrt{x+1} + \frac{5}{\sqrt{x+1}} - 2 \geq 2\sqrt{5} - 2 \text{ Vậy GTNN của } P = 2\sqrt{5} - 2 \text{ dấu "}" xảy ra khi}$$

$$\sqrt{x+1} = \frac{5}{\sqrt{x+1}} \Rightarrow (\sqrt{x+1})^2 = 5 \Rightarrow \sqrt{x+1} = \pm\sqrt{5}$$

**Bài 83 :** Cho biểu thức

$$P = \left( \frac{\sqrt{x}-2}{x-1} - \frac{\sqrt{x}+2}{x+2\sqrt{x}+1} \right) \left( \frac{1-x}{\sqrt{2}} \right)^2$$

a, Rút gọn P.

$$P = (1-x)\sqrt{x}$$

b, Chứng minh rằng nếu  $0 < x < 1$  thì  $P > 0$ .

c, Tìm giá trị lớn nhất của P.

Bài 84 : Cho biểu thức  $P = \frac{\sqrt{x+1}}{x-1} - \frac{x+2}{x\sqrt{x}-1} - \frac{\sqrt{x+1}}{x+\sqrt{x}+1}$

A, Rút gọn = ?

B, Với  $x > 0$  Tìm GTLN của  $Q = \frac{2}{P} + \sqrt{x}$

Giải :

A, Với  $x > 0$  rút gọn ta được

$$P = \frac{-\sqrt{x}}{x+\sqrt{x}+1}$$

B, Với  $x > 0$ ,  $x \neq 1$

$$Q = \frac{2}{P} + \sqrt{x} = \frac{2x+2\sqrt{x}+2}{-\sqrt{x}} + \sqrt{x} = -\frac{x+2\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}}$$

$$= -\left( \sqrt{x} + \frac{2}{\sqrt{x}} \right) - 2$$

Áp dụng bất đẳng thức cô-si với  $\sqrt{x}$  và  $\frac{2}{\sqrt{x}}$  ta có

$$\sqrt{x} + \frac{2}{\sqrt{x}} \geq 2\sqrt{\sqrt{x} \cdot \frac{2}{\sqrt{x}}} = 2\sqrt{2} \text{ nhân hai vế với } -1 \text{ ta có}$$

$$-\left( \sqrt{x} + \frac{2}{\sqrt{x}} \right) \leq -2\sqrt{2} \Rightarrow -\left( \sqrt{x} + \frac{2}{\sqrt{x}} \right) - 2 \leq -2\sqrt{2} - 2$$

$$\Rightarrow Q \leq -2\sqrt{2} - 2$$

Dấu « = » xảy ra khi  $\sqrt{x} = \frac{2}{\sqrt{x}} \Rightarrow x = 2$  TMĐK

Vậy với  $x=2$  thì biểu thức Q đạt GTLN là  $-2\sqrt{2}-2$

**Bài 85 :**

Cho biểu thức  $A = \left( \frac{1}{1-\sqrt{x}} - \frac{1}{\sqrt{x}} \right) : \left( \frac{2x + \sqrt{x} - 1}{1-x} + \frac{2x\sqrt{x} + x - \sqrt{x}}{1+x\sqrt{x}} \right)$  Với  $x > 0$ ;  $x \neq \frac{1}{4}$ ;  $x \neq 1$

a) Rút gọn biểu thức A.

b) Tính giá trị của A khi  $x = 17 - 12\sqrt{2}$

c) So sánh A với  $\sqrt{A}$ .

$$\begin{aligned} A &= \left( \frac{1}{1-\sqrt{x}} - \frac{1}{\sqrt{x}} \right) : \left( \frac{2x + \sqrt{x} - 1}{1-x} + \frac{2x\sqrt{x} + x - \sqrt{x}}{1+x\sqrt{x}} \right) \left( x > 0; x \neq \frac{1}{4}; x \neq 1 \right) \\ &= \frac{\sqrt{x} - 1 + \sqrt{x}}{\sqrt{x}(1-\sqrt{x})} : \left[ \frac{2x + 2\sqrt{x} - \sqrt{x} - 1}{(1-\sqrt{x})(1+\sqrt{x})} + \frac{\sqrt{x}(2x + \sqrt{x} - 1)}{(1+\sqrt{x})(1-\sqrt{x} + x)} \right] \\ &= \frac{2\sqrt{x} - 1}{\sqrt{x}(\sqrt{x} - 1)} : \left[ \frac{(\sqrt{x} + 1)(2\sqrt{x} - 1)}{(1-\sqrt{x})(1+\sqrt{x})} + \frac{\sqrt{x}(\sqrt{x} + 1)(2\sqrt{x} - 1)}{(1+\sqrt{x})(1-\sqrt{x} + x)} \right] \\ &= \frac{2\sqrt{x} - 1}{\sqrt{x}(\sqrt{x} - 1)} : \left[ (2\sqrt{x} - 1) \left( \frac{1}{1-\sqrt{x}} + \frac{\sqrt{x}}{1-\sqrt{x} + x} \right) \right] \\ &= \frac{2\sqrt{x} - 1}{\sqrt{x}(\sqrt{x} - 1)} : (2\sqrt{x} - 1) : \frac{1 - \sqrt{x} + x + \sqrt{x}(1 - \sqrt{x})}{(1-\sqrt{x})(1-\sqrt{x} + x)} \\ &= \frac{1}{\sqrt{x}(\sqrt{x} - 1)} : \frac{1}{(1-\sqrt{x})(1-\sqrt{x} + x)} = \frac{1 - \sqrt{x} + x}{\sqrt{x}} \end{aligned}$$

b) Tính giá trị của A khi  $x = 17 - 12\sqrt{2}$ .

$$\text{Tính } x = 17 - 12\sqrt{2} = (3 - 2\sqrt{2})^2 \Rightarrow \sqrt{x} = \sqrt{(3 - 2\sqrt{2})^2} = |3 - 2\sqrt{2}| = 3 - 2\sqrt{2}$$

$$A = \frac{1 - (3 - 2\sqrt{2}) + 17 - 12\sqrt{2}}{3 - 2\sqrt{2}} = \frac{15 - 10\sqrt{2}}{3 - 2\sqrt{2}} = \frac{5(3 - 2\sqrt{2})}{3 - 2\sqrt{2}} = 5$$

c) So sánh A với  $\sqrt{A}$ .

$$\text{Biến đổi } A = \frac{1 - \sqrt{x} + x}{\sqrt{x}} = \sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}} - 1$$

Chúng minh được  $\sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}} > 2$  với mọi  $x > 0; x \neq \frac{1}{4}; x \neq 1$

$$\Rightarrow A = \sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}} - 1 > 1 \Rightarrow \sqrt{A} > 1 \Rightarrow \sqrt{A} - 1 > 0 \Rightarrow \sqrt{A}(\sqrt{A} - 1) > 0$$

$$\Rightarrow A - \sqrt{A} > 0 \Rightarrow A > \sqrt{A}$$

Bài 86 :

$$\text{Cho } P = \left(1 - \frac{x-3\sqrt{x}}{x-9}\right) : \left(\frac{9-x}{x+\sqrt{x}-6} - \frac{\sqrt{x}-3}{2-\sqrt{x}} - \frac{\sqrt{x}-2}{\sqrt{x}+3}\right)$$

$$\text{A, Rút gọn P} \quad P = -\frac{3}{\sqrt{x}-2}$$

B, Tìm x để  $P > 0$

C, Với  $x > 4, x \neq 9$ . Tìm giá trị lớn nhất của P. ( $x+1$ )

$$\begin{aligned} \text{C, } P(x+1) &= -\frac{3}{\sqrt{x}-2} \cdot (x+1) = -\frac{3x+3}{\sqrt{x}-2} = -\frac{3x-12+9}{\sqrt{x}-2} = -\left(\frac{3x-12}{\sqrt{x}-2} + \frac{9}{\sqrt{x}-2}\right) \\ &= -\left(\frac{3(x-4)}{\sqrt{x}-2} + \frac{9}{\sqrt{x}-2}\right) = -\left[3(\sqrt{x}+2) + \frac{9}{\sqrt{x}-2}\right] = -\left[3\sqrt{x}+6 + \frac{9}{\sqrt{x}-2}\right] \\ &= -\left[3\sqrt{x}-6+12 + \frac{9}{\sqrt{x}-2}\right] = -\left[3(\sqrt{x}-2) + \frac{9}{\sqrt{x}-2} + 12\right] \end{aligned}$$

Áp dụng bất đẳng thức cô-si ta có

$$3(\sqrt{x}-2) + \frac{9}{\sqrt{x}-2} \geq 2\sqrt{3(\sqrt{x}-2) \cdot \frac{9}{\sqrt{x}-2}} = 6\sqrt{3} \text{ cộng hai vế với } 12$$

$$3(\sqrt{x}-2) + \frac{9}{\sqrt{x}-2} + 12 \geq 12 + 6\sqrt{3}$$

$$\text{nhân hai vế với } -1 \text{ ta có } -\left[3(\sqrt{x}-2) + \frac{9}{\sqrt{x}-2} + 12\right] \leq -12 - 6\sqrt{3}$$

giá trị lớn nhất của  $P = -12 - 6\sqrt{3}$  dấu “=” xảy ra khi

$$3(\sqrt{x}-2) = \frac{9}{\sqrt{x}-2} \Leftrightarrow 3(\sqrt{x}-2)^2 = 9 \Rightarrow (\sqrt{x}-2)^2 = 3$$

$$\Rightarrow \sqrt{x}-2 = \pm\sqrt{3} \Rightarrow \sqrt{x} = \sqrt{3}+2$$

Bài 86 : Rút gọn biểu thức:

A, Rút gọn P = ?

B, Tính P với  $x = 3 - 2\sqrt{2}$

C, Tìm GTNN của P

$$\begin{aligned}
 P &= \frac{x+2}{x\sqrt{x}-1} + \frac{\sqrt{x}+1}{x+\sqrt{x}+1} - \frac{\sqrt{x}+1}{x-1} \\
 P &= \frac{x+2}{x\sqrt{x}-1} + \frac{\sqrt{x}+1}{x+\sqrt{x}+1} - \frac{\sqrt{x}+1}{x-1} \\
 &= \frac{x+2}{(\sqrt{x}-1)(x+\sqrt{x}+1)} + \frac{\sqrt{x}+1}{x+\sqrt{x}+1} - \frac{1}{\sqrt{x}-1} \\
 &= \frac{x+2}{(\sqrt{x}-1)(x+\sqrt{x}+1)} + \frac{x-1}{(\sqrt{x}-1)(x+\sqrt{x}+1)} - \frac{x+\sqrt{x}+1}{(\sqrt{x}-1)(x+\sqrt{x}+1)} \\
 &= \frac{x-\sqrt{x}}{(\sqrt{x}-1)(x+\sqrt{x}+1)} \\
 &= \frac{\sqrt{x}}{x+\sqrt{x}+1}
 \end{aligned}$$

C, Tìm GTNN của P

$$P = \frac{\sqrt{x}}{x+\sqrt{x}+1} = \frac{\sqrt{x}}{x} + \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}} + \sqrt{x} = \frac{1}{\sqrt{x}} + \sqrt{x} + 1$$

Áp dụng bất đẳng thức cô – si ta có

$$\frac{1}{\sqrt{x}} + \sqrt{x} \geq 2\sqrt{\sqrt{x} \cdot \frac{1}{\sqrt{x}}} = 2 \text{ cộng hai vế với 1 ta có}$$

$$\frac{1}{\sqrt{x}} + \sqrt{x} + 1 \geq 2 + 1 = 3 \text{ Vậy GTNN của } P = 3 \text{ khi}$$

$$\frac{1}{\sqrt{x}} = \sqrt{x} \Rightarrow x = 1$$

Vậy  $x=1$  thì P có GTNN là 3

**Bài 87:**

$$\text{Cho } M = \left( \frac{1}{\sqrt{x}+1} - \frac{2\sqrt{x}}{x\sqrt{x}+\sqrt{x}+x+1} \right) : \left( 1 - \frac{2\sqrt{x}}{x+1} \right)$$

$$\text{a) Rút gọn M. } P = \frac{1}{\sqrt{x}+1}$$

$$\text{b) Tính M khi } x = 7 - 2\sqrt{6}.$$

**Bài 88 :**

Chứng minh rằng với mọi  $x \geq 0$ , giá trị biểu thức sau không phụ thuộc vào  $x$  :

$$A = \frac{2x}{x+3\sqrt{x}+2} + \frac{5\sqrt{x}+1}{x+4\sqrt{x}+3} + \frac{\sqrt{x}+10}{x+5\sqrt{x}+6}$$

$$= \frac{2x(\sqrt{x}+3) + (5\sqrt{x}+1)(\sqrt{x}+2) + (\sqrt{x}+10)(\sqrt{x}+1)}{(\sqrt{x}+1)(\sqrt{x}+2)(\sqrt{x}+3)}$$

$$= \frac{2x\sqrt{x}+12x+22\sqrt{x}+12}{x\sqrt{x}+6x+11\sqrt{x}+6} = \frac{2(x\sqrt{x}+6\sqrt{x}+11\sqrt{x}+6)}{x\sqrt{x}+6x+11\sqrt{x}+6} = 2$$

Bài 89 : Cho biểu thức  $P = \left( \frac{1}{1-\sqrt{x}} - \frac{1}{\sqrt{x}} \right) : \left( \frac{2x+\sqrt{x}-1}{1-x} + \frac{2x\sqrt{x}+x-\sqrt{x}}{1+x\sqrt{x}} \right)$

a, Rút gọn P.

b, So sánh P với  $\sqrt{P}$ .

**Bài 90 :** Cho biểu thức:

$$A = \left( \frac{x+1}{xy+1} + \frac{xy+x}{xy-1} - 1 \right) : \left( \frac{x+1}{xy+1} - \frac{xy+x}{xy-1} + 1 \right)$$

a) Rút gọn A

b) Tính giá trị của A nếu  $x = \sqrt{14+6\sqrt{5}}$  ,  $y = \frac{\sqrt{5}-1}{\sqrt{5}+1}$

a) Rút gọn đúng đến  $A = -xy$

Tìm điều kiện xác định :  $x \neq -1$ ;  $xy \neq \pm 1$

Tính ra  $x = 3 + \sqrt{5}$  ,  $y = \frac{3-\sqrt{5}}{2}$  (TM ĐKXD)

b) Thay vào A đ-ợc  $A = -2$

C.)  $\square$  p dụng BĐT  $\left( \frac{x+y}{2} \right)^2 \geq xy$  với mọi x,y

Thay  $x+y = \sqrt{2}$  và biến đổi dẫn đến  $A = -xy \geq -\frac{1}{2}$

Chỉ ra  $A = -xy = -\frac{1}{2}$  khi  $x = y = \frac{\sqrt{2}}{2}$  Và KL : GTNN của A là  $A_{\min} = -\frac{1}{2}$

Bài 91: Cho biểu thức:

$$B = \frac{3x^2 - x}{3x+2} : \frac{3x^3 - x^2 + 12x - 4}{x+2(x+1)}$$

a/ Rút gọn B

b/ Tìm GTNN và CTLN của B.

Giải: a/ Rút gọn B

$$B = \frac{3x^2 - x}{3x+2} : \frac{3x^3 - x^2 + 12x - 4}{x+2(x+1)} = \frac{3x^2 - x}{3x+2} \cdot \frac{x+2x+2}{3x^3 - x^2 + 12x - 4}$$

$$= \frac{x(3x-1)}{3x+2} \cdot \frac{3x+2}{x^2(3x-1)+4(3x-1)} = \frac{x(3x-1)(3x+2)}{(3x+2)(3x-1)(x^2+4)}$$

$$= \frac{x}{x^2+4} \quad \left(\text{với } x \neq \frac{1}{3}; x \neq \frac{-2}{3}\right)$$

$$\text{b/ } B = \frac{x}{x^2+4}$$

$$* \text{ Có } (x-2)^2 \geq 0 \Rightarrow x^2 - 4x + 4 \geq 0 \Rightarrow x^2 + 4 \geq 4x$$

**Chia 2** về cho  $x^2 + 4$ , ta đ-ợc:

$$\frac{x^2+4}{x^2+4} \geq \frac{4x}{x^2+4} \quad (x^2 \geq 0, x^2+4 \geq 4 > 0)$$

$$\Leftrightarrow 1 \geq \frac{4x}{x^2+4}$$

$$\text{Chia 2 về cho 4, ta đ-ợc: } \frac{1}{4} \geq \frac{x}{x+4} \Rightarrow B \leq \frac{1}{4}$$

Vậy, GTLN của B là  $\frac{1}{4}$  khi  $(x-2)^2 = 0$  hay  $x = 2$

$$* \text{ Có } (x+2)^2 \geq 0 \Rightarrow x^2 + 4x + 4 \geq 0 \Rightarrow x^2 + 4 \geq -4x$$

**Chia 2** về cho  $x^2 + 4$ , ta đ-ợc:

$$\frac{x^2+4}{x^2+4} \geq \frac{-4x}{x^2+4} \Leftrightarrow 1 \geq \frac{-4x}{x^2+4}$$

$$\text{Chia 2 về cho } (-4), \text{ ta đ-ợc: } \frac{-1}{4} \leq \frac{x}{x^2+4} \Rightarrow B \geq \frac{-1}{4}$$

Vậy GTNN của B là  $-\frac{1}{4}$  khi  $(x+2)^2 = 0$ , hay  $x = -2$

**Bài 93 :** Giải các pt sau:

$$\text{a) } \frac{1}{y^3 - y^2 + y - 1} - \frac{4}{y+1} = \frac{y^2 + 10y}{y^4 - 1} - \frac{4y^2 + 21}{y^3 + y^2 + y + 1}$$

$$\text{b) } y^3 + \frac{1}{y^3} = 78 \left( y + \frac{1}{y} \right)$$

$$\text{Bài 94 : Cho biểu thức: } A = \frac{2\sqrt{x}-9}{x-5\sqrt{x}+6} - \frac{\sqrt{x}+3}{\sqrt{x}-2} - \frac{2\sqrt{x}+1}{3-\sqrt{x}}$$

a) Rút gọn biểu thức A

b) Tìm x để  $A < 1$ .

c) Tìm giá trị nguyên của x để giá trị t-ong ứng của A cũng là số nguyên.

$$\text{Giải : a, với } x \geq 0, x \neq 4, x \neq 9 \text{ Rút gọn ta đ-ợc } A = \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-3}$$

$$B, \text{ với } x \geq 0 \Rightarrow \sqrt{x}+1 > 0 \text{ nên để } A < 1$$

$$\Leftrightarrow \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-3} - 1 < 0 \Leftrightarrow \frac{\sqrt{x}+1-\sqrt{x}+3}{\sqrt{x}-3} < 0 \Leftrightarrow \frac{4}{\sqrt{x}-3} < 0, \text{ vì } 4 > 0 \text{ nên để } \frac{4}{\sqrt{x}-3} < 0$$

Thì  $\sqrt{x}-3 < 0 \Rightarrow \sqrt{x} < 3 \Rightarrow x < 9$  vậy với  $x < 9$  thì  $A < 0$

$$C, A = \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-3} = \frac{\sqrt{x}-3+4}{\sqrt{x}-3} = 1 + \frac{4}{\sqrt{x}-3} \text{ vậy để } A \text{ nguyên thì } \frac{4}{\sqrt{x}-3}$$

$\sqrt{x}-3$  là Ư(4) =  $\pm 1, \pm 2, \pm 4$

**Bài 95** Cho biểu thức:  $B = \left( \frac{1-x\sqrt{x}}{\sqrt{x}-x} + 1 \right) \left( \frac{1+x\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}} - \sqrt{x} \right) : \frac{(1-x)^3}{1+\sqrt{x}}$

a) Rút gọn B

b) Với  $x = ?$  thì  $B = \frac{-1}{2}$

a, Rút gọn ta đ-ợc  $B = \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}(1-x)}$

Bài 96 : cho biểu thức:  $A = \left( 1 + \frac{\sqrt{a}}{a+1} \right) : \left( \frac{1}{\sqrt{a}-1} - \frac{2\sqrt{a}}{a\sqrt{a} + \sqrt{a}-a-1} \right)$

a. Rút gọn A

b. Tìm các giá trị của a sao cho  $A > 1$

a. Điều kiện:  $a \geq 0; a \neq 1$

$$A = \frac{a+1+\sqrt{a}}{a+1} : \left( \frac{1}{\sqrt{a}-1} - \frac{2\sqrt{a}}{(a+1)(\sqrt{a}-1)} \right)$$

$$= \frac{a+\sqrt{a}+1}{a+1} \cdot \frac{(a+1)(\sqrt{a}-1)}{(\sqrt{a}-1)^2} = \frac{a+\sqrt{a}+1}{\sqrt{a}-1}$$

b.  $A > 1 \Leftrightarrow \frac{a+\sqrt{a}+1}{\sqrt{a}-1} - 1 > 0 \Leftrightarrow \frac{a+2}{\sqrt{a}-1} > 0$

Vì  $a+2 > 0$  nên  $\sqrt{a}-1 > 0 \Leftrightarrow \sqrt{a} > 1 \Leftrightarrow a > 1$  (Thỏa mãn điều kiện)

Vậy  $A > 1$  khi  $a > 1$

Bài 97 : Cho biểu thức  $M = \frac{12\sqrt{x}-13}{x-\sqrt{x}-12} + \frac{2(\sqrt{x}+2)}{\sqrt{x}+3} + \frac{\sqrt{x}+1}{4-\sqrt{x}}, x \geq 0, x \neq 16$

A, Rút gọn M = ?

B, Tìm các giá trị của x để  $M > 2$

C, Tìm các giá trị nguyên của x để M nhận giá trị nguyên ?

Giải :

A,  $M = \frac{\sqrt{x}+8}{\sqrt{x}+3}$

B, Do  $x \geq 0$  nên  $\sqrt{x}+3 > 0, \sqrt{x}+8 > 0$  nên  $M > 2$

$\sqrt{x}+8 > 2(\sqrt{x}+3) \Rightarrow \sqrt{x} < 2 \Rightarrow x < 4$  kết hợp ta có

$0 \leq x < 4$  thì  $M > 2$

C,  $M = 1 + \frac{5}{\sqrt{x}+3}$ ,  $M$  là số nguyên  $\Leftrightarrow \sqrt{x}+3$  là ước dương của 5 vì  $\sqrt{x}+3 > 0$

Giải hai trường hợp ta được  $x=4$

Bài 98: Rút gọn biểu thức  $P = \left( \frac{\sqrt{1+x}}{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}} - \frac{1-x}{\sqrt{1-x^2}-1+x} \right) \left( \frac{x-1}{x} + \sqrt{\frac{1}{x^2}} \right)$

Trong đó  $0 < x < 1$

Rút gọn phân thức thứ hai trong ngoặc thứ nhất ta được  $\frac{\sqrt{1-x}}{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}$

Thay vào ta được  $P = \left( \frac{\sqrt{1+x}}{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}} - \frac{\sqrt{1-x}}{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}} \right) \left( 1 - \frac{1}{x} + \frac{1}{x} \right)$   
 $= 1.1 = 1$

Bài 99 : Cho biểu thức

$$M = \left( 1 - \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+1} \right) : \left( \frac{\sqrt{x}+3}{\sqrt{x}-2} + \frac{\sqrt{x}+2}{3-\sqrt{x}} + \frac{\sqrt{x}+2}{x-5\sqrt{x}+6} \right)$$

A, Rút gọn M

B, Tìm giá trị của x để  $M > 0$

Giải: a, rút gọn ta được  $M = \frac{\sqrt{x}-2}{\sqrt{x}+1}$

B, Vì  $x \geq 0 \Rightarrow \sqrt{x}+1 > 0$  vậy để  $M > 0$  thì  $\sqrt{x}-2 > 0 \Rightarrow \sqrt{x} > 2 \Rightarrow x > 4, \text{ và } x \neq 9$

Thì  $M > 0$

Bài 100: Cho biểu thức

$$P = \left( \frac{1}{1-\sqrt{x}} \right) : \left( \frac{2x+\sqrt{x}-1}{1-x} + \frac{2x\sqrt{x}+x-\sqrt{x}}{1+x\sqrt{x}} \right)$$

A, Rút gọn P=?

B, Tính giá trị của P với  $x = 7 - 4\sqrt{3}$

C, Tìm GTLN của a để  $P > a$

Giải : Rút gọn ta được  $P = \frac{1-\sqrt{x}+x}{\sqrt{x}}$

B, Với  $x = 7 - 4\sqrt{3}$  thay vào ta tìm được  $P = 3$

C,  $P = \frac{1-\sqrt{x}+x}{\sqrt{x}} = \frac{1}{\sqrt{x}} + \sqrt{x} - 1 \geq 2\sqrt{\frac{1}{\sqrt{x}} \cdot \sqrt{x}} - 1 = 2 - 1 = 1$

Vậy  $P \geq 1$  dấu “=” xảy ra khi  $\frac{1}{\sqrt{x}} = \sqrt{x} \Rightarrow x=1$

Nhưng  $x=1$  không thỏa mãn ĐKXD nên  $P > 1$

Suy ra GTLN của a để  $P > a$  là  $a=1$

Bài 101: Cho biểu thức

$$P = \frac{x\sqrt{x}-3}{x-2\sqrt{x}-3} - \frac{2(\sqrt{x}-3)}{\sqrt{x}+1} + \frac{\sqrt{x}+3}{3-\sqrt{x}}$$

A, Rút gọn P=?

B, Tính giá trị của P với  $x=14-6\sqrt{5}$

C, Tìm GTNN của P=?

Giải : a, Rút gọn ta được  $P = \frac{x+8}{\sqrt{x}+1}$

B, Với  $x=14-6\sqrt{5}$  khai triển đưa về hằng đẳng thức ta được  $P = \frac{58-2\sqrt{5}}{11}$

C,  $P = \frac{x+8}{\sqrt{x}+1} = \frac{x-1+9}{\sqrt{x}+1} = \sqrt{x}-1 + \frac{9}{\sqrt{x}+1} = \sqrt{x}+1 + \frac{9}{\sqrt{x}+1} - 2 \geq 2\sqrt{9} - 2 = 4$

Dấu “=” xảy ra khi  $\sqrt{x}+1 = \frac{9}{\sqrt{x}+1} \Leftrightarrow x=4$  Vậy min  $P=4$  khi và chỉ khi  $x=4$

Bài 102 : Cho biểu thức

$$P = \frac{x\sqrt{x}+5\sqrt{x}-12}{x-\sqrt{x}-6} - \frac{2(\sqrt{x}-3)}{\sqrt{x}+2} + \frac{\sqrt{x}+3}{3-\sqrt{x}}$$

A, rút gọn P=?

B, So sánh P và 4

C, Tính giá trị của P khi  $x = \frac{\sqrt{3-\sqrt{5}} - \sqrt{3+\sqrt{5}}}{\sqrt{2-\sqrt{3}} - \sqrt{2+\sqrt{3}}}$

Giải : a, Rút gọn ta được  $P = \frac{x+12}{\sqrt{x}+2}$

B, So sánh P và 4 xét hiệu  $P-4$  ta có

$$\frac{x+12}{\sqrt{x}+2} - 4 \Leftrightarrow \frac{x+12-4\sqrt{x}-8}{\sqrt{x}+2} = \frac{x-4\sqrt{x}+4}{\sqrt{x}+2} = \frac{(\sqrt{x}-2)^2}{\sqrt{x}+2}$$

Vì  $x \geq 0 \Rightarrow \sqrt{x}+2 > 0$  mà  $(\sqrt{x}-2)^2 \geq 0$  nên  $P-4 \geq 0 \Rightarrow P \geq 4$

C, Tính giá trị của P khi  $x = \frac{\sqrt{3-\sqrt{5}} - \sqrt{3+\sqrt{5}}}{\sqrt{2-\sqrt{3}} - \sqrt{2+\sqrt{3}}}$  Bình phương hai vế

$$x^2 = \frac{(\sqrt{3-\sqrt{5}} - \sqrt{3+\sqrt{5}})^2}{(\sqrt{2-\sqrt{3}} - \sqrt{2+\sqrt{3}})^2} = \frac{3-\sqrt{5}+3+\sqrt{5}-2\sqrt{(3-\sqrt{5})(3+\sqrt{5})}}{2-\sqrt{3}+2+\sqrt{3}-2\sqrt{(2-\sqrt{3})(2+\sqrt{3})}}$$

$$= \frac{6-2\sqrt{9-5}}{4-2\sqrt{4-3}} = \frac{6-4}{4-2} = \frac{2}{2} = 1 \Rightarrow x^2 = 1 \Rightarrow x = 1$$

$$\text{Thay vào P} = \frac{1+12}{\sqrt{1+2}} = \frac{13}{3}$$

**Bài 103:**

$$\text{Cho biểu thức: } A = \left( \frac{6x+4}{3\sqrt{3x^3}-8} - \frac{\sqrt{3x}}{3x+2\sqrt{3x}+4} \right) \left( \frac{1+3\sqrt{3x^3}}{1+\sqrt{3x}} - \sqrt{3x} \right)$$

1. Rút gọn biểu thức A.

2. Tìm các giá trị nguyên của x để biểu thức A nhận giá trị nguyên.

$$A = \left( \frac{6x+4}{3\sqrt{3x^3}-8} - \frac{\sqrt{3x}}{3x+2\sqrt{3x}+4} \right) \left( \frac{1+3\sqrt{3x^3}}{1+\sqrt{3x}} - \sqrt{3x} \right)$$

Ta có:  $3x+2\sqrt{3x}+4 = (\sqrt{3x}+1)^2 + 3 > 0; 1+\sqrt{3x} > 0, \forall x \geq 0$ , nên điều kiện để A có nghĩa là

$$(\sqrt{3x})^3 - 8 = (\sqrt{3x}-2)(3x+2\sqrt{3x}+4) \neq 0, x \geq 0 \Leftrightarrow \sqrt{3x} \neq 2 \Leftrightarrow 0 \leq x \neq \frac{4}{3}$$

$$A = \left( \frac{6x+4}{(\sqrt{3x})^3 - 2^3} - \frac{\sqrt{3x}}{3x+2\sqrt{3x}+4} \right) \left( \frac{1+(\sqrt{3x})^3}{1+\sqrt{3x}} - \sqrt{3x} \right)$$

$$A = \left( \frac{6x+4 - (\sqrt{3x}-2)\sqrt{3x}}{(\sqrt{3x}-2)(3x+2\sqrt{3x}+4)} \right) (3x - \sqrt{3x} + 1 - \sqrt{3x})$$

$$A = \left( \frac{3x+4+2\sqrt{3x}}{(\sqrt{3x}-2)(3x+2\sqrt{3x}+4)} \right) (3x - 2\sqrt{3x} + 1)$$

$$A = \frac{(\sqrt{3x}-1)^2}{\sqrt{3x}-2} \quad (0 \leq x \neq \frac{4}{3})$$

$$A = \frac{(\sqrt{3x}-1)^2}{\sqrt{3x}-2} = \frac{(\sqrt{3x}-2)^2 + 2(\sqrt{3x}-2) + 1}{\sqrt{3x}-2} = \sqrt{3x} + \frac{1}{\sqrt{3x}-2}$$

Với x là số nguyên không âm, để A là số nguyên thì

$$\sqrt{3x}-2 = \pm 1 \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{3x}=3 \\ \sqrt{3x}=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x=9 \\ 3x=1 \end{cases} \Leftrightarrow x=3 \text{ (vì } x \in \mathbf{Z} \text{ và } x \geq 0).$$

Khi đó: A = 4

**Bài 104:** Rút gọn các biểu thức sau:

$$a. \quad A = \sqrt{\sqrt{6} + \sqrt{3+2\sqrt{2}}} \cdot \sqrt{3+2\sqrt{2}} \cdot \sqrt{\sqrt{6} - \sqrt{3+2\sqrt{2}}}.$$

$$b. \quad B = \frac{(2008^2 - 2014) \cdot (2008^2 + 4016 - 3) \cdot 2009}{2005 \cdot 2007 \cdot 2010 \cdot 2011}$$

$$A = \sqrt{3+2\sqrt{2}} \cdot \sqrt{(\sqrt{6})^2 - (\sqrt{3+2\sqrt{2}})^2} = \sqrt{3+2\sqrt{2}} \cdot \sqrt{6 - (3+2\sqrt{2})}$$

$$A = \sqrt{(3+2\sqrt{2})(3-2\sqrt{2})} = \sqrt{9 - (2\sqrt{2})^2} = 1$$

$$B = \frac{(2008^2 - 2014) \cdot (2008^2 + 4016 - 3) \cdot 2009}{2005 \cdot 2007 \cdot 2010 \cdot 2011}. \text{ Đặt } x = 2008, \text{ khi đó}$$

$$B = \frac{(x^2 - x - 6)(x^2 + 2x - 3)(x + 1)}{(x - 3)(x - 1)(x + 2)(x + 3)} =$$

$$\frac{(x + 2)(x - 3)(x + 3)(x - 1)(x + 1)}{(x - 3)(x - 1)(x + 2)(x + 3)} = x + 1 = 2009$$

$$\text{Tính : } A = \sqrt{4 + \sqrt{5\sqrt{3} + 5\sqrt{48 - 10\sqrt{7} + 4\sqrt{3}}}}$$

$$\text{Ta có : } A = \sqrt{4 + \sqrt{5\sqrt{3} + 5\sqrt{48 - 10\sqrt{(2 + \sqrt{3})^2}}}}$$

$$A = \sqrt{4 + \sqrt{5\sqrt{3} + 5\sqrt{48 - 10(2 + \sqrt{3})}}}$$

$$A = \sqrt{4 + \sqrt{5\sqrt{3} + 5\sqrt{28 - 10\sqrt{3}}}}$$

$$A = \sqrt{4 + \sqrt{5\sqrt{3} + 5\sqrt{(5 - \sqrt{3})^2}}}$$

$$A = \sqrt{4 + \sqrt{5\sqrt{3} + 5(5 - \sqrt{3})}} = \sqrt{4 + \sqrt{5\sqrt{3} + 25 - 5\sqrt{3}}} = \sqrt{4 + 5} = 3$$

Chứng minh rằng :  $A = n^3 (n^2 - 7)^2 - 36n$  Chia hết cho 7 với mọi  $n$

$$\text{Ta có : } A = n^3 (n^2 - 7)^2 - 36n = n^3 (n^4 - 14n^2 + 49) - 36n$$

$$= n^7 - 14n^5 + 49n^3 - 36n$$

$$= (n^7 - n^5) - (13n^5 - 13n^3) + (36n^3 - 36n)$$

$$= n^5(n^2 - 1) - 13n^3(n^2 - 1) + 36n(n^2 - 1)$$

$$= (n^2 - 1) \cdot (n^5 - 13n^3 + 36n)$$

$$= (n^2 - 1) \{ (n^5 - 4n^3) - (9n^3 - 36n) \}$$

$$= (n^2 - 1) \{ n^3(n^2 - 4) - 9n(n^2 - 4) \}$$

$$= (n^2 - 1)(n^2 - 4)(n^3 - 9n)$$

$$= (n^2 - 1)(n - 2)(n + 2)n(n^2 - 9)$$

$$= (n-1)(n+1)(n-2)(n+2)n(n-3)(n+3)$$

$$\text{Vậy: } A = (n-3)(n-2)(n-1)n(n+1)(n+2)(n+3)$$

Vì  $n$  là số tự nhiên nên số  $A$  là tích của 7 số tự nhiên liên tiếp. Rồi chứng minh cho tích của 7 số tự nhiên liên tiếp chia hết cho 7

Kết luận:  $A$  chia hết cho 7

**Bài 105 :**

a) Cho hàm số  $f(x) = (x^3 + 12x - 31)^{2010}$

$$\text{Tính } f(a) \text{ tại } a = \sqrt[3]{16-8\sqrt{5}} + \sqrt[3]{16+8\sqrt{5}}$$

$$a = \sqrt[3]{16-8\sqrt{5}} + \sqrt[3]{16+8\sqrt{5}}$$

$$\Rightarrow a^3 = 32 + 3\sqrt{(16-8\sqrt{5})(16+8\sqrt{5})} \cdot (\sqrt[3]{16-8\sqrt{5}} + \sqrt[3]{16+8\sqrt{5}})$$

$$\Rightarrow a^3 = 32 + 3 \cdot (-4) \cdot a \Rightarrow a^3 = 32 - 12a \Rightarrow a^3 + 12a - 32 = 0$$

$$\Rightarrow a^3 + 12a - 31 = 1 \Rightarrow f(a) = 1^{2010} = 1$$

**Bài 106 :** Cho biểu thức:  $P = \frac{x}{x-\sqrt{x}} + \frac{2}{x+2\sqrt{x}} + \frac{x+2}{(\sqrt{x}-1)(x+2\sqrt{x})}$

d. Rút gọn  $P$ .

e. Tính  $P$  khi  $x = 3 + 2\sqrt{2}$ .

c, Tìm giá trị nguyên của  $x$  để  $P$  nhận giá trị nguyên

, Đk  $x > 0; x \neq 1$

$$\begin{aligned} P &= \frac{x}{\sqrt{x}(\sqrt{x}-1)} + \frac{2}{\sqrt{x}(\sqrt{x}+2)} + \frac{x+2}{\sqrt{x}(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+2)} \\ &= \frac{x(\sqrt{x}+2) + 2(\sqrt{x}-1) + x+2}{\sqrt{x}(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+2)} = \frac{x\sqrt{x} + 2x + 2\sqrt{x} - 2 + x + 2}{\sqrt{x}(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+2)} \\ &= \frac{x\sqrt{x} + 2x + 2\sqrt{x} + x}{\sqrt{x}(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+2)} = \frac{\sqrt{x}(\sqrt{x}+1)(\sqrt{x}+2)}{\sqrt{x}(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+2)} = \frac{(\sqrt{x}+1)}{(\sqrt{x}-1)} \end{aligned}$$

b, Với  $x = 3 + 2\sqrt{2} \Leftrightarrow \sqrt{x} = \sqrt{2+2\sqrt{2}+1} = \sqrt{(\sqrt{2}+1)^2} = \sqrt{2}+1$

$$P = \frac{(\sqrt{x}+1)}{(\sqrt{x}-1)} = \frac{\sqrt{2}+1+1}{\sqrt{2}+1-1} = \frac{\sqrt{2}+2}{\sqrt{2}} = 1 + \sqrt{2}$$

c, Đ/ K:  $x > 0; x \neq 1$ :  $P = \frac{(\sqrt{x}+1)}{(\sqrt{x}-1)} = \frac{\sqrt{x}-1+2}{\sqrt{x}-1} = 1 + \frac{2}{\sqrt{x}-1}$

$$\text{Để } P \text{ nguyên thì } \frac{2}{\sqrt{x}-1} \text{ nguyên}$$

tìm ra  $x = 4$  hoặc  $x = 9$

**Bài 107 :** Rút gọn biểu thức:  $A = \frac{x^2 - 5x + 6 + 3\sqrt{x^2 - 6x + 8}}{3x - 12 + (x-3)\sqrt{x^2 - 6x + 8}}$

ĐKXD:  $x \neq 2$  hoặc  $x > 4$

$$A = \frac{(x-2)(x-3) + 3\sqrt{(x-2)(x-4)}}{3(x-4) + (x-3)\sqrt{(x-2)(x-4)}}$$

• Trường hợp 1:  $x \neq 2$ , ta có:

$$\begin{aligned} A &= -\frac{(2-x)(3-x) + 3\sqrt{(2-x)(4-x)}}{3(4-x) + (3-x)\sqrt{(2-x)(4-x)}} = -\frac{(\sqrt{2-x})^2(3-x) + 3\sqrt{2-x}\sqrt{4-x}}{3(\sqrt{4-x})^2 + (3-x)\sqrt{2-x}\sqrt{4-x}} \\ &= -\frac{\sqrt{2-x}[(3-x)\sqrt{2-x} + 3\sqrt{4-x}]}{\sqrt{4-x}[3\sqrt{4-x} + (3-x)\sqrt{2-x}]} = -\frac{\sqrt{2-x}}{\sqrt{4-x}} \quad (\text{vì } x \neq 2 \text{ nên } 3\sqrt{4-x} + (3-x)\sqrt{2-x} > 0) \end{aligned}$$

Trường hợp 2:  $x > 4$ , ta có:  $3\sqrt{x-4} + (x-3)\sqrt{x-2} > 0$  nên:

$$A \stackrel{(1)}{=} \frac{(\sqrt{x-2})^2(x-3) + 3\sqrt{x-2}\sqrt{x-4}}{3(\sqrt{x-4})^2 + (x-3)\sqrt{x-2}\sqrt{x-4}} = \frac{\sqrt{x-2}[(x-3)\sqrt{x-2} + 3\sqrt{x-4}]}{\sqrt{x-4}[3\sqrt{x-4} + (x-3)\sqrt{x-2}]} = \frac{\sqrt{x-2}}{\sqrt{x-4}}$$

### **Bài 108.**

Cho biểu thức:  $A = \left(1 - \frac{2\sqrt{a}}{a+1}\right) : \left(\frac{1}{1+\sqrt{a}} - \frac{2\sqrt{a}}{a\sqrt{a} + \sqrt{a} + a+1}\right)$ , với  $a \geq 0$

1. Rút gọn biểu thức A.

2. Tính giá trị của biểu thức A khi  $a = 2010 - 2\sqrt{2009}$ .

**1.**

Với điều kiện  $a \geq 0$ . Ta có:

$$A = \left(1 - \frac{2\sqrt{a}}{a+1}\right) : \left(\frac{1}{1+\sqrt{a}} - \frac{2\sqrt{a}}{a\sqrt{a} + \sqrt{a} + a+1}\right),$$

$$\frac{a-2\sqrt{a}+1}{a+1} : \left(\frac{1}{1+\sqrt{a}} - \frac{2\sqrt{a}}{(a+1)(1+\sqrt{a})}\right)$$

$$\frac{(\sqrt{a}-1)^2}{a+1} : \frac{a+1-2\sqrt{a}}{(a+1)(1+\sqrt{a})}$$

$$\frac{(\sqrt{a}-1)^2(a+1)(1+\sqrt{a})}{(a+1)(\sqrt{a}-1)^2} = 1 + \sqrt{a}$$

Khi  $a = 2010 - 2\sqrt{2009} = (\sqrt{2009} - 1)^2$

Thì  $A = 1 + \sqrt{(\sqrt{2009} - 1)^2} = \sqrt{2009}$

**Bài 109:** Cho biểu thức  $A = \frac{x+2}{x\sqrt{x}-1} + \frac{\sqrt{x}+1}{x+\sqrt{x}+1} - \frac{1}{\sqrt{x}-1}$

d. Rút gọn biểu thức A

ĐKXD:  $x \geq 0; x \neq 1$

$$\begin{aligned} A &= \frac{x+2}{x\sqrt{x}-1} + \frac{\sqrt{x}+1}{x+\sqrt{x}+1} - \frac{1}{\sqrt{x}-1} = \frac{x+2+x-1-x-\sqrt{x}-1}{(\sqrt{x}-1)(x+\sqrt{x}+1)} \\ &= \frac{x-\sqrt{x}}{(\sqrt{x}-1)(x+\sqrt{x}+1)} = \frac{\sqrt{x}(\sqrt{x}-1)}{(\sqrt{x}-1)(x+\sqrt{x}+1)} = \frac{\sqrt{x}}{x+\sqrt{x}+1} \end{aligned}$$

e. Tính giá trị biểu thức A khi  $x=33-8\sqrt{2}$

Ta có  $x=33-8\sqrt{2}=(4\sqrt{2}-1)^2 \Rightarrow \sqrt{x}=4\sqrt{2}-1$

$$\Rightarrow A = \frac{4\sqrt{2}-1}{33-8\sqrt{2}+4\sqrt{2}-1+1} = \frac{4\sqrt{2}-1}{33-4\sqrt{2}}$$

f. Chứng minh  $A < \frac{1}{3}$

$$\text{Xét } A - \frac{1}{3} = \frac{\sqrt{x}}{x+\sqrt{x}+1} - \frac{1}{3} = \frac{3\sqrt{x}-x-\sqrt{x}-1}{3(x+\sqrt{x}+1)} = \frac{-(x-2\sqrt{x}+1)}{3(x+\sqrt{x}+1)} = \frac{-(\sqrt{x}-1)^2}{3(x+\sqrt{x}+1)}$$

$$\text{Do } x \geq 0; x \neq 1 \Rightarrow \begin{cases} -(\sqrt{x}-1)^2 < 0 \\ 3(x+\sqrt{x}+1) > 0 \end{cases} \Rightarrow \frac{-(\sqrt{x}-1)^2}{3(x+\sqrt{x}+1)} < 0$$

$$\Rightarrow A - \frac{1}{3} < 0 \Leftrightarrow A < \frac{1}{3}$$

**Bài 110:** Cho biểu thức  $P = \left( \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1} + \frac{\sqrt{x}}{x-1} \right) : \left( \frac{2}{x} - \frac{2-x}{x\sqrt{x}+x} \right)$

a/ Rút gọn P

b/ Tìm x để  $P > 2$

c/ Tìm giá trị nhỏ nhất của  $\sqrt{P}$

Rút gọn P: Điều kiện  $x > 0$  và  $x \neq 1$

$$P = \left( \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1} + \frac{\sqrt{x}}{x-1} \right) : \left( \frac{2}{x} - \frac{2-x}{x\sqrt{x}+x} \right) = \frac{\sqrt{x}(\sqrt{x}+1)+\sqrt{x}}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)} : \frac{2(\sqrt{x}+1)-(2-x)}{x(\sqrt{x}+1)}$$

$$P = \frac{x+2\sqrt{x}}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)} \cdot \frac{x(\sqrt{x}+1)}{x+2\sqrt{x}} = \frac{x}{\sqrt{x}-1}$$

b/ Tìm x để  $P > 2$

$$P > 2 \Leftrightarrow \frac{x}{\sqrt{x}-1} > 2 \Leftrightarrow \frac{x}{\sqrt{x}-1} - 2 > 0 \Leftrightarrow \frac{x-2\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}-1} > 0 \Leftrightarrow \frac{(\sqrt{x}-1)^2+1}{\sqrt{x}-1} > 0 \Leftrightarrow x > 1$$

Kết hợp điều kiện, vậy với  $x > 1$  thì  $P > 2$

c/ Để có  $\sqrt{P}$  thì  $P > 0 \Leftrightarrow \frac{x}{\sqrt{x}-1} > 0 \Leftrightarrow x > 1$  (Do điều kiện  $x > 0$ )

Do  $P > 0 \Rightarrow \sqrt{P} \text{ min} \Leftrightarrow P \text{ min}$

Ta có:  $\frac{1}{P} = \frac{\sqrt{x}-1}{x} = \frac{1}{\sqrt{x}} - \frac{1}{x} = -\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{1}{4}\right) + \frac{1}{4} = -\left(\frac{1}{\sqrt{x}} - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{4} \leq \frac{1}{4} \Rightarrow P \geq 4$

Suy ra:  $P \text{ min} = 4$  (Dấu bằng xảy ra khi  $x = 4$ )  $\Rightarrow \sqrt{P} \text{ min} = 2$ , khi  $x = 4$

**Bài 111:** Cho biểu thức:  $A = \left(\sqrt{a} + \frac{b-\sqrt{ab}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}\right) : \left(\frac{a}{\sqrt{ab}+b} + \frac{b}{\sqrt{ab}-a} - \frac{a+b}{\sqrt{ab}}\right)$

a) Rút gọn A.

b) Tính giá trị của A biết:  $a = 6 - 2\sqrt{5}$  và  $b = 5$

**Bài 112:** Cho biểu thức  $A = \left(\frac{\sqrt{x}+3}{\sqrt{x}-2} - \frac{\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}-3} + \frac{\sqrt{x}+2}{x-5\sqrt{x}+6}\right) : \left(1 - \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+1}\right)$

Với  $x \geq 0; x \neq 4; x \neq 9$

a) Rút gọn biểu thức A.

b) Tìm giá trị của A khi  $x = 4 - 2\sqrt{3}$ .

c) Với giá trị nào của x thì  $\frac{1}{A}$  đạt giá trị nhỏ nhất? Tìm giá trị nhỏ nhất đó.

**Bài 113:** Cho biểu thức:

$$A = \left(\frac{x}{x\sqrt{x}-4\sqrt{x}} - \frac{6}{3\sqrt{x}-6} + \frac{1}{\sqrt{x}+2}\right) : \left(\sqrt{x}-2 + \frac{10-x}{\sqrt{x}+2}\right)$$

a, Tìm điều kiện của x để A có nghĩa.

b, Rút gọn A.

c, Tìm x để  $A < 2$ .

Điều kiện  $x \geq 0; x \neq 4$

$$A = \left(\frac{x}{x\sqrt{x}-4\sqrt{x}} - \frac{6}{3\sqrt{x}-6} + \frac{1}{\sqrt{x}+2}\right) : \left(\sqrt{x}-2 + \frac{10-x}{\sqrt{x}+2}\right)$$

$$= \left[\frac{x}{\sqrt{x}(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+2)} - \frac{6}{3(\sqrt{x}-2)} + \frac{1}{\sqrt{x}+2}\right] : \frac{x-4+10-x}{\sqrt{x}+2}$$

$$= \frac{\sqrt{x}-2(\sqrt{x}+2)+\sqrt{x}-2}{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+2)} : \frac{6}{\sqrt{x}+2}$$

$$= \frac{-6}{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+2)} \cdot \frac{\sqrt{x}+2}{6} = \frac{1}{2-\sqrt{x}}$$

Ta có  $A < 2 \Leftrightarrow \frac{1}{2-\sqrt{x}} < 2$  và  $x \geq 0; x \neq 4$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2-\sqrt{x}} - 2 < 0 \Leftrightarrow \frac{2\sqrt{x}-3}{2-\sqrt{x}} < 0$$

$$+ \text{ Tr- ờng hợp 1: } \begin{cases} 2\sqrt{x}-3 > 0 \\ 2-\sqrt{x} < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > \frac{9}{4} \\ x > 4 \end{cases}$$

$$+ \text{ Tr- ờng hợp 2: } \begin{cases} 2\sqrt{x}-3 < 0 \\ 2-\sqrt{x} > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < \frac{9}{4} \\ x < 4 \end{cases}$$

Kết hợp với điều kiện ta có  $x > 4$  hoặc  $0 \leq x < \frac{9}{4}$  thì  $A < 2$ .

**Bài 114:** Cho biểu thức  $A = \left( \frac{1}{1-\sqrt{x}} - \frac{1}{\sqrt{x}} \right) : \left( \frac{2x+\sqrt{x}-1}{1-x} + \frac{2x\sqrt{x}+x-\sqrt{x}}{1+x\sqrt{x}} \right)$

a) Rút gọn biểu thức A.

b) Tính giá trị của A khi  $x = 17 - 12\sqrt{2}$

c) So sánh A với  $\sqrt{A}$ .

**Bài 115:** Cho biểu thức :

$$P = \left( \frac{\sqrt{a}+1}{\sqrt{a}-1} - \frac{\sqrt{a}-1}{\sqrt{a}+1} + 4\sqrt{a} \right) \frac{1}{2a\sqrt{a}}, \text{ (Với } a > 0, a \neq 1)$$

1. Chứng minh rằng :  $P = \frac{2}{a-1}$

2. Tìm giá trị của a để  $P = a$

2. Tìm giá trị của a để  $P = a$ .  $P = a$

$$\Rightarrow \frac{2}{a-1} = a \Rightarrow a^2 - a - 2 = 0$$

Ta có  $1 + 1 + (-2) = 0$ , nên phương trình có 2 nghiệm

$a_1 = -1 < 0$  (không thỏa mãn điều kiện) - Loại

$$a_2 = \frac{-c}{a} = \frac{2}{1} = 2 \text{ (Thỏa mãn điều kiện)}$$

Vậy  $a = 2$  thì  $P = a$

**Bài 116 :**

a) Rút gọn biểu thức  $A = \frac{5\sqrt{a}-3}{\sqrt{a}-2} + \frac{3\sqrt{a}+1}{\sqrt{a}+2} - \frac{a^2+2\sqrt{a}+8}{a-4}$  với  $a \geq 0, a \neq 4$

b) Tính giá trị của biểu thức  $B = \sqrt{4+2\sqrt{3}} + \sqrt{7-4\sqrt{3}}$

$$\begin{aligned}
A &= \frac{5\sqrt{a}-3}{\sqrt{a}-2} + \frac{3\sqrt{a}+1}{\sqrt{a}+2} - \frac{a^2+2\sqrt{a}+8}{a-4} = \frac{(5\sqrt{a}-3)(\sqrt{a}+2) + (3\sqrt{a}+1)(\sqrt{a}-2) - (a^2+2\sqrt{a}+8)}{(\sqrt{a}-2)(\sqrt{a}+2)} \\
&= \frac{5a+10\sqrt{a}-3\sqrt{a}-6+3a-6\sqrt{a}+\sqrt{a}-2-a^2-2\sqrt{a}-8}{(\sqrt{a}-2)(\sqrt{a}+2)} = \frac{-a^2+8a-16}{(\sqrt{a}-2)(\sqrt{a}+2)} = \frac{-(a^2-8a+16)}{(\sqrt{a}-2)(\sqrt{a}+2)} \\
&= \frac{-(a-4)^2}{a-4} = -(a-4) = 4-a
\end{aligned}$$

$$d) B = \sqrt{4+2\sqrt{3}} + \sqrt{7-4\sqrt{3}} = \sqrt{(\sqrt{3}+1)^2} + \sqrt{(2-\sqrt{3})^2} = |\sqrt{3}+1| + |2-\sqrt{3}| = \sqrt{3}+1+2-\sqrt{3} = 3$$

**Bài 117:**

$$\text{Cho biểu thức: } P = \frac{x\sqrt{x}+26\sqrt{x}-19}{x+2\sqrt{x}-3} - \frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1} + \frac{\sqrt{x}-3}{\sqrt{x}+3}$$

a) Rút gọn  $P$ .b) Tìm  $x$  để  $P$  đạt giá trị nhỏ nhất.a) ĐK:  $0 \leq x \neq 1$ . Ta có:

$$\begin{aligned}
P &= \frac{x\sqrt{x}+26\sqrt{x}-19}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+3)} - \frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1} + \frac{\sqrt{x}-3}{\sqrt{x}+3} \\
&= \frac{x\sqrt{x}+26\sqrt{x}-19-2\sqrt{x}(\sqrt{x}+3)+(\sqrt{x}-3)(\sqrt{x}-1)}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+3)} \\
&= \frac{x\sqrt{x}+26\sqrt{x}-19-2x-6\sqrt{x}+x-4\sqrt{x}+3}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+3)} \\
&= \frac{x\sqrt{x}-x+16\sqrt{x}-16}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+3)} = \frac{(\sqrt{x}-1)(x+16)}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+3)} = \frac{x+16}{\sqrt{x}+3}
\end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned}
P &= \frac{x+16}{\sqrt{x}+3} = \sqrt{x}-3 + \frac{25}{\sqrt{x}+3} = \sqrt{x}+3 + \frac{25}{\sqrt{x}+3} - 6 \\
&\geq 2\sqrt{(\sqrt{x}+3)\frac{25}{\sqrt{x}+3}} - 6 = 10 - 6 = 4
\end{aligned}$$

$$\text{Vậy GTNN của } P = 4 \text{ khi } \sqrt{x}+3 = \frac{25}{\sqrt{x}+3} \Leftrightarrow x = 4$$